Nelson Ricardo Tiago Arvelos

Relatório de Estágio

Lisboa

2010

UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

RELATÓRIO DE ESTÁGIO

Por

Nelson Ricardo Tiago Arvelos

Dissertação apresentada na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa para obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário.

Orientador: Professor Doutor António Manuel Domingos

Co-Orientador: Dr.ª Maria Cândida Ribeiro

Lisboa

2010

Índice

PARTE I – Relatório de Prática Pedagógica

PARTE II – Trabalho de Investigação na Prática Pedagógica:

- A Influência da Aprendizagem de Funções no Desenvolvimento do Pensamento Matemático

PARTE I – Relatório de Prática Pedagógica

Índice

1. Introdução

A minha reflexão na prática pedagógica como aluno estagiário, incluiu na actividade lectiva a observação e regência de aulas, e foi realizada nas duas turmas do 10.º ano de escolaridade, Matemática A, da orientadora da Escola Secundária com 2.º e 3.º ciclos Anselmo de Andrade, a Professora Maria Cândida Ribeiro. Deste modo, não foi possível, ao contrário de outros núcleos de estágio situados em escolas diferentes, desenvolver a minha actividade lectiva em turmas de ciclos/anos de escolaridade diferentes. A actividade lectiva regeu-se pelos seguintes princípios:

a) A planificação e a distribuição das actividades lectivas dos estagiários são feitas nos núcleos de estágio, devendo ser aprovadas pelos respectivos núcleos;

b) Até ao final do primeiro mês (contado após o início das actividades lectivas), o estagiário dedicar-se-á sobretudo ao acompanhamento sistemático do processo de organização do ensino, incluindo a análise e discussão de documentos, a observação de aulas acompanhada por tarefas, ou a avaliação dos alunos, visando a sua integração progressiva na vida da escola;

c) Após o período de tempo referido em b), poderão iniciar-se as regências por parte do estagiário, cabendo a cada estagiário a leccionação supervisionada de um mínimo de 12 tempos lectivos (cada tempo lectivo correspondendo a um período de 90 minutos). Esta prática lectiva supervisionada deve corresponder a sequências de ensino completas (unidades didácticas) e espaçadas ao longo do ano, podendo ocorrer em momentos isolados quando se destinam à observação por parte do orientador da Universidade;

d) O orientador da Universidade deverá observar um mínimo de 3 e um máximo de 5 aulas por estagiário e discuti-las com este, em momentos anteriores e posteriores à leccionação.

2. Integração na Escola Secundária Anselmo de Andrade

O meu primeiro contacto com a Professora Cândida Ribeiro, orientadora do estágio, foi via telemóvel. Logo, nesse momento, fiquei com a melhor das impressões, como mais tarde se veio a verificar. Conheci pessoalmente, pela primeira vez, a Professora Cândida Ribeiro numa reunião do núcleo de estágio, onde estava também presente a minha colega de estágio, Sidneia Mota, que eu já conhecia há mais de um ano, pois, frequentámos algumas disciplinas da parte curricular do Mestrado em Ensino da Matemática, realizando, inclusive, alguns trabalhos de grupo. Quanto à outra colega de estágio, Galyna Babynyuk, conhecia-a mais tarde, também numa reunião do núcleo de estágio.

Na Escola Secundária Anselmo de Andrade, tanto o pessoal docente como o não docente, trataram-me sempre com respeito, e esse respeito foi recíproco da minha parte. A coordenadora do departamento de Matemática mostrou ser uma pessoa simpática e acessível, sempre com disponibilidade para nos informar sobre determinados assuntos relativos ao desenvolvimento da nossa actividade lectiva como estagiários. Na primeira reunião do núcleo de estágio, a orientadora entregou aos estagiários uma pasta da Escola Secundária Anselmo de Andrade, com as relações de fotografias, relações de alunos e horários das turmas C e D, juntamente com o calendário escolar 2009/2010, a planificação anual da disciplina Matemática A, do 10.ºano de escolaridade, para o ano lectivo 2009/2010, os critérios de avaliação da disciplina de Matemática nos anos 10.º, 11.º e 12.º anos, o projecto educativo 2009/2013 e o regulamento interno de 2009/2013.

As reuniões do núcleo de estágio realizavam-se normalmente uma vez por semana, às Quartas-feiras, das 12h30 às 14h00, no Gabinete de Matemática.

Para trabalharmos no âmbito das nossas actividades lectivas a realizar, enquanto estagiários de Matemática, tínhamos ao nosso dispor a biblioteca da escola, equipada com uma dezena de computadores com o Microsoft Office e o sistema operativo, também da Microsoft, designado por Windows Vista, instalados.

3. Caracterização das turmas de estágio

A Professora Cândida Ribeiro, orientadora do estágio, atribuiu-me a turma D do 10.º ano de escolaridade, Matemática A, do curso de Ciências Socioeconómicas. No entanto, também assisti a algumas aulas da turma 10.º C (curso de Ciências e Tecnologias), leccionadas, quer pela orientadora, quer pelas minhas colegas estagiárias, com o objectivo de melhorar os processos de aprendizagem dos alunos, aquando da transmissão de conteúdos curriculares idênticos.

A turma D era composta por 28 alunos, 11 raparigas e 17 rapazes, tendo uma média de idades de 15 anos. Como a maioria dos alunos desta turma era proveniente de outras escolas, não foi possível ter acesso a uma caracterização da turma, onde estivesse discriminado o comportamento individual dos alunos e o seu aproveitamento na conclusão do 9.º ano de escolaridade. Com o decorrer do ano lectivo, tornou-se possível formar uma opinião acerca das capacidades e do comportamento dos alunos. Consequentemente, a turma D é composta, principalmente por alunos medianos, que são os que apresentam um comportamento mais adequado na sala de aula. Quanto aos extremos, os melhores alunos, escassos em número, assim como, os alunos mais fracos, também escassos em número, alguns apresentam na sala de aula um comportamento que dificulta, e muito, o trabalho do Professor. Entretanto, estes alunos também sabem facilitar a vida do Professor, sobretudo, quando estão com atenção e participam activamente na construção da aula de Matemática. Também é importante referir que os alunos da turma D efectuaram, na sua esmagadora maioria, os trabalhos que foram enviados para casa.

A turma C era composta por 29 alunos, 11 raparigas e 18 rapazes, tendo uma média de idades de 15 anos. Tal com na turma D, Também na turma C, não foi possível ter acesso a uma caracterização da turma, uma vez que, grande parte dos alunos era oriunda de outras escolas. Também, com o decorrer do ano lectivo, foi possível formar uma opinião acerca das capacidades e do comportamento individual dos alunos. Deste modo, na turma C, existem, em número idêntico, tantos alunos fracos, como alunos medianos, não existindo praticamente nenhum bom aluno. O comportamento destes alunos dentro da sala de aula é globalmente adequado, mas, como raramente participam de uma forma espontânea na construção da aula de matemática, torna-se difícil ao Professor comunicar matematicamente, sem saber quais os seus raciocínios, quais as suas dúvidas, entre muitos outros aspectos a considerar. Ao contrário da turma D, os alunos da turma C já não entregavam com tanta frequência alguns dos trabalhos enviados para casa.

4. Acção de formação: Escola Virtual na Sala de Aula

No dia 3 de Novembro de 2009, eu, as minhas duas colegas de estágio e a Professora Cândida Ribeiro participámos numa acção de formação levada a cabo pela Porto Editora, subordinada ao tema Escola Virtual na Sala de Aula, que decorreu no laboratório de Matemática da Escola Secundária Anselmo de Andrade, entre as 17h30 e as 20h00, e que contou com a participação de quase todos os Professores de Matemática pertencentes aos quadros daquela escola.

Nesta acção de formação, o formador, enviado pela Porto Editora, mostrou-nos no quadro interactivo do laboratório como usar uma plataforma digital, muito idêntica ao Moodle, mas com um maior leque de funcionalidades disponíveis, no ensino dos conteúdos curriculares da disciplina de Matemática, desde o 1.º ciclo do ensino básico até ao ensino secundário. Das funcionalidades que abrangem o 1.º ciclo do ensino básico, destacaram-se as histórias animadas, recorrendo, por exemplo, a fábulas, em que os alunos aprendem a tabuada, e aprendem também a contar e a efectuar operações matemáticas, tais como, a adição, a subtracção, a multiplicação, ou a divisão, através de processos audiovisuais interactivos, importantes para fomentar o interesse na disciplina, desde tenra idade. Em relação aos outros ciclos do ensino básico e, sobretudo, em relação ao ensino secundário, gostei imenso do facto de existirem muitos materiais didácticos disponíveis, como por exemplo, fichas de trabalho e testes de avaliação, uma vez que, facilitam, e muito, a preparação das aulas efectuadas pelos professores. Outro aspecto a salientar está relacionado com a possibilidade, desde que hajam salas nas escolas com computadores em número suficiente para todos os alunos da turma, de se efectuarem testes de escolha múltipla, ou em que seja necessário efectuar construções geométricas, através de softwares de geometria dinâmica, como por exemplo, o Geogebra, podendo o Professor observar em tempo real, e online, através da plataforma digital, as resoluções dos alunos.

O Professor também pode utilizar esta plataforma digital como uma ferramenta de e-learning, abrindo foruns e chat-rooms para os alunos exporem as suas dúvidas, ou entregarem trabalhos para avaliação, ao estilo do que acontece no moodle (por exemplo, na disciplina de Geometria Dinâmica do 2.º ano do curso "Mestrado em Ensino da Matemática", os mestrandos tinham que entregar semanalmente a resolução de uma ficha de trabalho no Moodle, para avaliação). O Professor também pode disponibilizar aos alunos informação sobre vários assuntos, e materiais didácticos, tais como fichas de trabalho, ou resumos teóricos, por exemplo. Resumindo e concluindo, foi um fim de tarde, princípio de noite bem passado, no entanto, só tenho a lamentar o facto de não termos sido nós a experimentar estes recursos digitais da Porto Editora, dada a escassez de computadores no laboratório de Matemática e, também, devido ao facto de duas, três horas não serem suficientes para rever tantos materiais didácticos destinados a todos os anos escolares.

5. Reunião do grupo de Matemática

No dia 12 de Janeiro de 2010, Terça-Feira, realizou-se, entre as 17h30 e as 20h00, no laboratório de Matemática da Escola Secundária Anselmo de Andrade um reunião do grupo de professores de Matemática, à qual eu assisti (a última reunião do grupo de Matemática ocorreu em meados de Novembro do ano passado, mais precisamente, no dia 17 de Novembro de 2009, na qual, eu não estive presente, porque não foi solicitada a minha presença).

Nesta reunião, debateram-se vários assuntos, tais como:

– Indicação dos alunos que necessitam de apoio;

– Discussão da forma de apoio a fornecer aos alunos;

– Alterações do horário de alguns professores motivadas pela inclusão de aulas suplementares, destinadas a prestar apoio a alguns alunos do 3.º ciclo do ensino básico;

– Distribuição de verbas atribuídas pelo P.A.M (Plano de Acção da Matemática), nomeadamente, para compra de material escolar (manuais escolares com uma maior variedade de exercícios e melhor articulados com a teoria);

– Referência aos itens do GAVE disponibilizados na Internet para efeitos de preparação para o teste intermédio do 10º ano de escolaridade, que se realizará no próximo dia 29 de Janeiro de 2010;

– Informações de carácter geral destinadas aos professores, como por exemplo, uma acção de formação que irá decorrer numa escola situada em Setúbal, no próximo dia 18 de Janeiro de 2010, pelas 15h00, formação essa que incidirá no uso do quadro interactivo. Para participar nesta acção de formação, foi necessário preencher previamente um boletim de inscrição distribuído nessa mesma reunião de grupo, ao qual, eu não tive acesso, porque as vagas foram ocupadas pelos professores pertencentes ao quadros da escola, uma vez que, o seu número era limitado.

– Menção aos novos programas do ensino básico e às respectivas formas de implementação destes na escola;

– Preparação da recepção aos alunos oriundos de outras escolas, no âmbito da realização de mais uma eliminatória das olimpíadas da Matemática, que irão efectuar-se no dia 13 de Janeiro de 2010, Quarta-Feira, pelas 15h00, na Escola Secundária Anselmo de Andrade, ou seja, no dia seguinte ao dia em que se realizou esta reunião do grupo de Matemática, na qual, tanto eu como a colega de estágio, Galyna Babynyuk, e a minha orientadora, a Professora Cândida Ribeiro, estivemos presentes. Nesta fase das olimpíadas, ainda existem alguns alunos da Escola Secundária Anselmo de Andrade em prova.

6. Visita de Estudo: Futurália

No dia 11 de Março, de 2010, Quinta-Feira, eu e as minhas colegas de estágio, Sidneia Mota e Galyna Babynyuk, fomos à Futurália – Salão de Oferta Educativa, Formação e Emprego, situada na FIL/PARQUE DAS NAÇÕES, como acompanhantes da turma do 10.º D, no âmbito de uma visita de estudo liderada pela directora de turma, a Professora de História, Nazaré Pereira. O objectivo da Futurália é disponibilizar informação e contactos que incentivem o desenvolvimento humano e permitam o encontro de soluções de formação, educação, qualificação e emprego em torno das seguintes áreas temáticas:

- Oferta de qualificação avançada para activos
- Oferta de educação/formação secundária
- Oferta de ensino superior
- Inserção na vida activa, emprego e empreendedorismo.

O seu público-alvo é:

- Alunos do ensino secundário a partir do 9.º ano de escolaridade
- Estudantes universitários
- Licenciados à procura de oportunidades de inserção na vida activa
- Pais e encarregados de educação
- Professores
- Especialistas de formação e emprego.

Quanto às áreas em exposição, temos:

– Formação avançada

MBA's, Pós-Graduações, Mestrados, Doutoramentos, formação especializada para quadros superiores.

– Ensino superior

Universidades, Institutos Politécnicos, Escolas e Institutos Superiores, Fundações e Entidades que concedem bolsas de estudo.

– Study Abroad

Universidades estrangeiras, Programas internacionais de intercâmbio e estágio, Institutos de Línguas, Embaixadas.

– Formação Inicial, Ensino não Superior e Formação Profissional

Escolas Profissionais, Escolas Tecnológicas, Centros e empresas de Formação, Institutos de Línguas, outras instituições com ofertas de formação.

– Inserção na vida Activa, Emprego e Empreendedorismo

Empresas de recrutamento e selecção, empresas de trabalho temporário, portais de emprego, grandes empregadores com programas de estágio e ofertas de emprego, especialistas de inserção profissional, iniciativas de auto-emprego, parques de ciência e tecnologia.

– Juventude

Associações de Estudantes, Juvenis e outras, empresas de turismo juvenil, campos de férias, ATL, Municípios, Juntas de Freguesia.

– Outras Instituições

Ministérios, Fundações, Embaixadas, Ong’s.

– FUTURDIDAC

Mobiliário e Equipamento Escolar, Material Didáctico e laboratorial, software, hardware, e outros equipamentos, editoras, livros escolares e livros técnicos, artigos escolares diversos.

Durante os quatro dias de realização da Futurália, decorrem actividades paralelas, tais como, Seminários e Workshops.

Nesta visita de estudo, a Professora Nazaré Pereira distribuiu os alunos em grupos de cinco/seis alunos, sendo cada grupo orientado na visita à Futurália por um Professor. No meu caso, coube-me em sorte um grupo maioritariamente constituído por alunas. Visitámos principalmente as instituições do ensino superior presentes no salão, nas quais, se destacaram as ofertas educativas das Universidades. A maioria dos alunos revelou-se interessada nas licenciaturas de Economia e Gestão, o que não é surpreendente, uma vez que, pertencem a uma turma do curso de ciências socioeconómicas, do 10.º ano de escolaridade. Recordo-me de o meu grupo ser muito unido e, por isso, nunca ter perdido ninguém. Os alunos fizeram-me imensas perguntas acerca da minha vida académica, e a mensagem que eu lhes procurei passar foi a de que, sem trabalho, nada se consegue. Por isso, para que, no futuro possam almejar a concretizar aquilo que ambicionam no presente, nada melhor do que começar já a trabalhar num ritmo mais intenso, em relação àquele que estavam habituados a trabalhar no 9.º ano de escolaridade. Dei-lhes como exemplo a diferença entre o tempo que um aluno necessita, para se preparar para um teste de avaliação, e o tempo que um aluno necessita para se preparar para um exame. Como é óbvio, o tempo dispendido em relação a este último é substancialmente maior do que em relação ao primeiro, sendo a disciplina e os hábitos de estudo muito importantes para o sucesso neste tipo de avaliação. Para concluir, posso dizer que foi um dia bem passado na presença de adolescentes, ávidos por encontrar a sua identidade no seio da nossa sociedade. Eles são o nosso futuro, a nossa esperança.

7. Actividade "Concurso de Problemas"

No dia 14 de Março, de 2010, Domingo, celebrou-se o dia do Π (curiosamente, tanto a minha mãe, como Albert Einstein nasceram neste dia). Este dia antecedeu a semana da Matemática na Escola Secundária Anselmo de Andrade. Deste modo, eu, a Sidneia e a Galyna, estagiários de matemática, organizámos, sob a supervisão da Professora Cândida Ribeiro, a seguinte actividade extracurricular, intitulada "Concurso de Problemas para todos os anos lectivos", a qual, passo a descrever:

- Seis cartazes de cartolina colorida, com três problemas matemáticos por cartaz (problemas sobre o semi-real, charadas, ou raciocínio lógico) – ao todo, são dezoito problemas.
- Na folha de resposta, deve constar o número, o nome e a turma do aluno, assim como, os números dos problemas.
- Uma caixa tipo "Urna de Voto", para os alunos poderem colocar as suas folhas de resposta aos problemas. Localização da "Urna" na escola – Bloco 5 (entrada).
- Fixação do cartaz na escola (Gabinete de Matemática – Bloco principal) com o nome, número e turma dos alunos classificados em 1.º, 2.º e 3.º lugares do concurso, respectivamente.
- Prémio simbólico atribuído ao vencedor.
- A actividade terá a duração de apenas um dia (dia 15 de Março, de 2010, Segunda-feira), das 9h00 às 18h00.
- Os cartazes originais serão colocados no bloco principal (onde se situa o Gabinete de Matemática); serão afixadas cópias dos cartazes por quase todas as salas de aula.

Esta actividade não teve a adesão esperada, apesar do nosso esforço em incentivar os alunos a participarem. Alguns alunos, que se encontravam junto aos expositores onde os cartazes dos problemas se encontravam afixados, mostraram-se muito interessados, mas acabaram, ou por não entregar folhas de resposta aos problemas, ou, entregando folhas com respostas erradas. No meu ponto de vista, este facto ficou-se a dever à falta de divulgação da nossa actividade, por parte dos outros professores de Matemática, na semana anterior à semana da Matemática na Escola Secundária Anselmo de Andrade.

Também é importante referir que, há muito tempo que não se faziam actividades deste tipo, destinadas a todos os alunos da escola.

8. Descrição de algumas actividades lectivas desenvolvidas dentro e fora da sala de aula

1.º Período

O primeiro trabalho que a Professora Cândida Ribeiro nos pediu, logo na primeira reunião de orientação de estágio, foi o de elaborar a planificação a médio prazo da unidade curricular "Geometria no plano e no espaço", na qual se inclui a distribuição do conteúdo pelas aulas e a definição das competências/objectivos a desenvolver.

Dentro da subunidade "Geometria analítica" ficou definido que eu ia leccionar os seguintes conteúdos: Referenciais no plano e no espaço, condições e conjuntos de pontos, e lugares geométricos.

A orientadora entregou-nos o teste de avaliação que ia ser realizado pelos alunos no dia 17/Novembro/2009, pedindo-nos para elaborar as cotações e os respectivos critérios de classificação (gerais e específicos). Depois deste teste ter sido realizado pelos alunos das turmas C e D do 10.º ano de escolaridade, a Professora Cândida Ribeiro deu-me alguns testes de alunos da turma D, no sentido de eu os corrigir e classificar.

Na 10.ª reunião de orientação de estágio, a orientadora pediu-nos para resolver a ficha de trabalho n.º10, para, posteriormente, lhe entregarmos a resolução. Na reunião seguinte, a Professora Cândida Ribeiro deu-me algumas fichas de trabalho n.º 10, de alunos da turma D, para eu as corrigir. Na 13.ª reunião, ficou estipulado, como trabalho a desenvolver, resolver os itens do Gave e resolver as fichas de trabalho, que foram enviadas como trabalho para casa dos alunos, durante as férias de Natal.

2.º Período

Na 14.ª reunião de orientação de estágio, a primeira do ano 2010, a orientadora pediu-nos para efectuarmos a planificação a médio prazo da unidade curricular "Funções". Na reunião seguinte, elaborámos, em conjunto, as cotações para o Mini-Teste com um dos itens do Gave, com a Professora Cândida Ribeiro a atribuir-me, à posteriori, Mini-Testes de alunos da turma D, para eu os corrigir e classificar. Nesta reunião, também ficou estipulado que eu ia dar aulas de apoio aos alunos das turmas C e D, no Gabinete de Matemática, às Quartas-Feiras, das 14h30 às 15h30, no âmbito da preparação para o Teste Intermédio a realizar no dia 29/Janeiro/2010.

Na reunião seguinte, a orientadora pediu-nos para seleccionarmos problemas no âmbito da actividade idealizada por nós, e designada por, "Concurso de problemas". Esta actividade inseriu-se no plano anual de actividades da escola, tendo como objectivo a celebração do dia do Π (14/Março/2010) na semana da Matemática, que decorreu do dia 15 até ao dia 19 de Março de 2010. Nesta reunião, como a Professora Cândida Ribeiro pediu-nos para pensar numa forma de introdução do novo tema "Funções e Gráficos", eu resolvi elaborar um plano de aula relativo ao conceito de função, gráfico e representação gráfica de uma função, juntamente com uma introdução histórica ao conceito de função e uma ficha de trabalho, complementar em relação à matéria a leccionar, descrita no plano de aula.

Na reunião de 3/Fevereiro/2010, ficou combinado que o teste de avaliação de 23/Fevereiro/2010 ia ser elaborado por nós, estagiários. No entanto, primeiro, cada estagiário elaborou um teste de avaliação completo e, depois, seleccionaram-se as melhores questões dos três testes realizados pelos estagiários. Segundo, elaborou-se o teste de avaliação para as turmas C e D.

Depois de seleccionarmos os 18 problemas para a actividade "Concurso de problemas" e analisarmos o Teste Intermédio – 10.º ano, do dia 29/Janeiro/2010, a Professora Cândida Ribeiro distribuiu por cada estagiário quatro testes intermédios, previamente corrigidos pela orientadora, no sentido de nós os classificarmos, para, posteriormente compararmos as classificações entre nós e com a classificação atribuída pela orientadora.

Na reunião seguinte, foi-nos pedido para resolvermos o teste de avaliação do 10.º ano, de 23/Fevereiro/2010, de forma a aferirmos o grau de dificuldade e o tempo necessário à sua resolução, assim como, a elaboração dos critérios de classificação. Também me foi pedido para elaborar os planos de aula a leccionar neste período lectivo.

Na reunião do dia 24/Fevereiro/2010, foram-me atribuídos alguns testes de avaliação de 23/Fevereiro/2010, relativos a alunos da turma D, no sentido de eu os corrigir e classificar. Também continuámos o processo de selecção de problemas para o dia do Π.

Na reunião do dia 10/Março/2010, a orientadora entregou-nos os enunciados dos testes de avaliação, para o dia 12/03/2010, das turmas C e D, e pediu-nos para os resolvermos e elaborarmos os critérios de classificação para cada teste. Como o dia do Π estava cada vez mais próximo, a Professora Cândida pediu-nos para levarmos à prática a actividade "Concurso de Problemas".

Na reunião de 17/03/2010, a orientadora deu-me alguns testes de avaliação de 12/03/2010, de alunos da turma 10.º D, para eu os corrigir e classificar.

Na última reunião de orientação de estágio, que teve lugar no dia 24/Março/2010, analisámos as grelhas com as classificações dos alunos, referentes ao 2.º período, comentámos as nossas aulas assistidas e autoavaliámo-nos, preenchendo uma grelha intitulada "Observação de aulas", elaborada pela orientadora de estágio.

3.º Período

Neste período, dentro das actividades lectivas desenvolvidas por mim, destaco a realização de três planos de aulas, que eu leccionei, ainda dentro da unidade curricular "Funções", um Mini-Teste com duas versões, para a turma D, e um Teste de avaliação, juntamente com as cotações e os critérios de classificação (gerais e específicos), para posterior comparação com os testes elaborados pelos minhas colegas estagiárias e o teste de avaliação, com duas versões diferentes, elaborado pela orientadora, e realizado pelos alunos das turmas C e D, respectivamente. Neste período, também tive que resolver uma ficha de trabalho intitulada "Função quadrática e função módulo; transformação de funções", no sentido de corrigir algumas resoluções desta ficha de trabalho, entregues por alunos da turma D.

Na última reunião de orientação de estágio, que ocorreu no dia 16/Junho/2010, a Professora Cândida Ribeiro pediu a cada estagiário que fizesse uma reflexão geral do seu ano "zero" como Professor de Matemática na Escola Secundária Anselmo de Andrade, e pediu-nos também sugestões, no sentido de melhorar as suas aulas, prova de humildade de uma Professora que respira e inspira competência e rigor na sua prática pedagógica.

9. Prática Pedagógica Supervisionada

A primeira experiência que tive como Professor da turma 10.º D, foi numa actividade relacionada com sólidos platónicos, que tinha como suporte a ficha de trabalho n.º 3. Nos primeiros 45 minutos da aula de Matemática, eu ficava com metade dos alunos da turma D (cerca de 14 alunos) na sala de aula, e realizávamos em conjunto a actividade 1 da ficha de trabalho, pondo em prática a relação de Euler, através do preeenchimento da tabela relativa ao número de faces, de vértices e de arestas dos sólidos platónicos, observando, para o efeito, as figuras representativas destes sólidos no manual escolar. Antes de iniciarmos a resolução da actividade, fiz uma breve introdução histórica ao tema dos sólidos platónicos, e fiquei muito surpreendido com a receptividade dos alunos e com o tipo, e com a quantidade de questões que me colocaram, mostrando uma enorme curiosidade por Platão e pelos seus sólidos, e também por aquilo que estes simbolizavam (o cubo simbolizava o elemento Terra, o tetraedro simbolizava o Fogo, o Ar era representado pelo octaedro e a Água pelo icosaedro. O dodecaedro simbolizava a harmonia, ou seja, o próprio Universo). Nos segundos 45 minutos, a minha metade da turma ia para o laboratório de Matemática e a outra metade da turma, que se encontrava sob a orientação da Professora Cândida Ribeiro, vinha para a sala de aula realizar a mesma actividade efectuada pelos meus alunos. Nestes segundos 45 minutos, os alunos que ficaram comigo no laboratório, puderam montar e desmontar modelos de plástico destes sólidos platónicos (tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro), e, desta forma verificar fisicamente as propriedades destes sólidos que já tinham sido observadas anteriormente, durante a resolução da actividade 1 da ficha de trabalho.

De acordo com o que foi estipulado numa reunião de orientação de estágio, planifiquei e leccionei, no 1.º período, seis aulas do tema Geometria Analítica, inserido na unidade curricular designada por Geometria. No seguinte quadro, aparecem discriminados os conteúdos leccionados nessas aulas:

Período lectivo: **1.º Período**	
Unidade Curricular**: Geometria**	
Aulas	**Conteúdos**
1. ª	Referenciais cartesianos no plano. Simetrias no plano. Rectas paralelas aos eixos coordenados. Semiplanos.
2. ª	Equações das bissectrizes dos quadrantes. Simetrias no plano. Negação de uma condição. Condições e conjuntos.
3. ª	Conjunção e disjunção de condições. Condições e conjuntos. Primeiras leis de De Morgan.
4. ª	Referencial ortogonal e monométrico no espaço. Planos coordenados. Planos perpendiculares aos eixos coordenados.
5. ª	Planos paralelos aos planos coordenados. Rectas no espaço. Simetrias no espaço.
6. ª	Condições em R^3. Semiespaços.

No 2.º período planifiquei cinco aulas e, destas cinco, leccionei apenas quatro, referentes aos temas "função quadrática" e "função módulo". O quadro seguinte discrimina as matérias planificadas e/ou leccionadas nessas aulas:

Período lectivo**: 2.º Período**	
Unidade Curricular: **Funções**	
Aulas	**Conteúdos**
-	Conceito de função. Gráfico e representação gráfica de uma função.
1. ª	Equações e inequações do 2.º grau.
2. ª	Contradomínio de uma função quadrática. Eixo de simetria do gráfico de uma função quadrática.
3. ª	Módulo ou valor absoluto de um número real. Estudo da função módulo $f(x)=\|x\|$.
4. ª	Resolução de equações e inequações com módulos, analítica e graficamente, com e sem recurso à calculadora gráfica.

No 3.º período planifiquei e leccionei três aulas do tema "Polinómios; operações com polinómios; factorização de polinómios". O quadro seguinte discrimina os conteúdos leccionados nessas aulas:

Período lectivo: **3.º Período**	
Unidade Curricular: **Funções**	
Aulas	**Conteúdos**
1.ª	Polinómios numa variável. Reduzir e ordenar um polinómio. Operações com polinómios.
2.ª	Multiplicação de polinómios. Divisão inteira de polinómios. Regra de Ruffini.
3.ª	Teorema do resto. Zeros de um polinómio. Factorização de um polinómio.

Na preparação/planificação das aulas, procurei sempre fazê-lo com antecedência e de uma forma tranquila. Também procurei sempre reflectir antes e depois de cada aula, fosse esta leccionada por mim, por uma colega estagiária, ou, pela orientadora, de forma a poder melhorar no futuro a gestão e o funcionamento de uma aula. Parafraseando a minha orientadora, devemos transmitir segurança, firmeza e amizade, de modo a criar um bom clima de ensino-aprendizagem, sendo que, a nossa preocupação principal deve estar em criar situações de aprendizagem onde o aluno sinta que ele próprio é capaz de ajudar a "descobrir e a construir o conhecimento".

Na planificação das minhas aulas tive os seguintes aspectos em conta:

- Dominar os conteúdos programáticos
- Definir os objectivos com precisão
- Estabelecer um encadeamento lógico para os assuntos
- Exprimir-me com rigor (na forma oral e escrita)
- Seleccionar estratégias e recursos diversificados

Quanto à realização da aula, tive os seguintes aspectos em consideração:

- Demonstrar segurança na leccionação dos conteúdos
- Utilizar uma linguagem rigorosa, clara e adequada aos alunos
- Apelar à construção do conhecimento, através da participação dos alunos
- Integrar as intervenções dos alunos na dinâmica da aula
- Conseguir um bom clima de trabalho ao nível pedagógico, científico e disciplinar
- Actuar adequadamente em situações imprevistas

Em relação à forma como eu realizei as minhas aulas, existem muitos aspectos que eu espero melhorar no futuro. Por exemplo, imprimir um ritmo mais acelerado, tornando a aula mais dinâmica, interagir melhor com os alunos, organizar melhor aquilo que escrevo no quadro e generalizar as explicações a todos os alunos, estes são alguns aspectos, entre muitos outros, que eu tenciono aperfeiçoar, de modo a que as minhas aulas sejam mais fluidas e naturais.

10. Conclusão

O Perfil Geral de Desempenho Profissional dos Professores dos Ensino Básico e Secundário estabelece quatro dimensões de desempenho profissional: a profissional, social e ética; a de desenvolvimento do ensino e da aprendizagem; a de participação na escola e de relação com a comunidade; e a de desenvolvimento profissional ao longo da vida. Este perfil organiza-se em torno de duas vertentes: a matemática e o ensino e aprendizagem da Matemática.

Um dos meus objectivos, na realização das minhas aulas, foi o de dar a conhecer alguns episódios da História da Matemática no início da leccionação de novos temas, de modo a mostrar aos alunos que a Matemática é uma ciência evolutiva e em permanente construção, ao contrário do que a maioria pensa, que é uma ciência estagnada, onde praticamente tudo já foi inventado. Também procuro que os alunos compreendam a importância da Matemática na nossa vida quotidiana, nomeadamente, nas actividades profissionais de carácter científico e tecnológico.

Tal como referi anteriormente, sempre tive a preocupação de reflectir sobre as minhas planificações e também sobre a forma como ensino, pois, só assim poderei melhorar enquanto Professor. Um dos maiores desafios, enquanto Professor de Matemática, foi, é e será o de desenvolver nos alunos a capacidade de pensar matematicamente e dar-lhes a confiança necessária, para que eles participem activamente na aula de Matemática e contribuam para a sua construção. Para mim, dentro da sala de aula, não há classes sociais, não há raças e não interessa o número de vezes que o aluno já reprovou. Todos os alunos são tratados da mesma forma, porque todos devem ter a oportunidade de estudar uma Matemática de qualidade. Nas aulas leccionadas por mim, procurei integrar, sempre que isso fosse possível, a tecnologia (por exemplo, recorri a aplicações computacionais de Geometria Dinâmica – Geogebra, quando os conteúdos a leccionar estavam relacionados com a Geometria, ou, quando foi necessário efectuar a representação gráfica de algumas funções – função módulo, pois, é muito mais fácil mostrar as alterações produzidas pela variação dos parâmetros na representação gráfica destas funções).

Para terminar, quero agradecer à minha orientadora, às minhas colegas de estágio e a todos os outros colegas e Professores do curso “Mestrado em Ensino da Matemática”, da F.C.T., por me terem ajudado quando eu mais precisava e, por me terem dado a oportunidade de ser Professor de Matemática.

PARTE II – Trabalho de Investigação na Prática Pedagógica:

- A Influência da Aprendizagem de Funções no Desenvolvimento do Pensamento Matemático

Resumo

Este estudo tem como objectivo analisar os processos de raciocínio usados por alunos do 10.º ano de escolaridade na aprendizagem de funções, durante a resolução da tarefa de exploração e investigação, com recurso à utilização da calculadora gráfica. Deste objectivo, resultam as seguintes questões de investigação:

1. Como é que os alunos interpretam o conceito de função em diferentes representações (algébrica, gráfica, numérica e tabela)?
2. Qual a interpretação dos alunos sobre as propriedades das funções em diferentes representações? Em particular, quais os processos utilizados na passagem de uma representação para outra?
3. Quais as representações e processos utilizados pelos alunos na resolução de problemas, com funções quadráticas?

Numa escola secundária com 2.º e 3.º ciclos, tendo em vista os objectivos do estudo, foram seleccionados três alunos, de uma turma do 10.º ano de escolaridade (curso de ciências socioeconómicas). A metodologia adoptada é do tipo qualitativo, e baseia-se em estudos de caso. Os dados foram recolhidos a partir de uma entrevista realizada aos três alunos, depois de se ter leccionado o tema "Função quadrática", complementada pela observação de aulas, preenchimento de dois questionários e análise das respostas dos alunos, dadas na realização da tarefa de investigação, dos testes de avaliação e das fichas de trabalho.

Os resultados obtidos mostram que os alunos revelam diversas dificuldades na compreensão do conceito de função em diferentes representações. Também permitem concluir que os alunos sabem identificar as propriedades de funções nas representações gráficas e algébricas, mostrando, desta forma, que adquiriram competências relativamente a algumas propriedades da função afim e da função quadrática. A realização da tarefa de investigação, por parte dos alunos, possibilitou a utilização de vários processos característicos da actividade matemática. No entanto, na resolução de problemas, os alunos utilizaram principalmente processos algébricos e usaram processos gráficos, apenas quando a natureza do problema assim o exigia. Só numa ocasião, um aluno também usou processos gráficos com recurso à calculadora.

Palavras-chave: Aprendizagem das funções, resolução de problemas, tarefa de exploração e investigação, e calculadora gráfica.

Abstract

This study aims to analyze the reasoning processes used by students of 10Th grade in functions learning, during a task of exploration and research solving, using graphic calculators. From this objective, results the following research questions:

- How do students interpret the concept of function in table, algebraic, graphical and numerical representations?
- What is the interpretation of the students on properties of functions in different representations? In particular, what are the processes used in passing from one representation to another?
- What are the representations and processes used by students in solving problems, with quadratic functions?

In a secondary school with 2nd and 3rd cycles, considering the objectives of the study, three students were selected from a Th-grade class (course of socio-economic sciences). The adopted methodology is qualitative, based on case studies. Data were collected from an interview carried out with three students, after having taught the subject "Quadratic function", supplemented by classroom observations, two questionnaires and analysis of the students answers given in the task of research, tests and homework assignments.

The results show that students revealed several difficulties in understanding the concept of function in different representations. Also indicate that students know how to identify the properties of functions in graphic and algebraic representations, showing, thus, that they have acquired skills on some properties of quadratic and linear functions. Performing the research task, by students, allowed the use of various characteristic processes of mathematical activity. However, in problem solving, the students mainly used algebraic processes, applying graphic processes only when the nature of the problem required it. Only in one occasion, a student have also used graphic processes with the help of the graphic calculator.

Key words: Functions learning, problem solving, exploratory and research task, and graphic calculator.

Agradecimentos

Ao Professor Doutor António Domingos pela forma decidida como me orientou, pelas suas críticas e sugestões, pelas palavras de encorajamento e, principalmente, pela disponibilidade mostrada desde a primeira hora em que ingressei no curso.

À Professora Cândida Ribeiro, pelo seu rigor, interesse e disponibilidade na minha orientação, pelas suas críticas construtivas e sugestões esclarecedoras e, acima de tudo, pela sua simpatia e amizade.

Aos colegas que me ajudaram na realização de inúmeros trabalhos durante os dois anos de mestrado: Fernando Tavares, Alice Cantante, Sidnéia Mota, Teresa Oliveira, Cátia Maneca e Galyna Babynyuk.

Aos alunos que participaram neste estudo pela colaboração e disponibilidade e, sobretudo, pelo tempo que dedicaram à minha investigação.

Ao Jorge, por ser o irmão que eu nunca tive, companheiro nas boas e nas más horas.

Ao meu pai e à minha mãe, por me motivarem e apoiarem em todos os momentos.

À coragem do meu pai e à memória da minha mãe,

Felizarda Rosa.

Índice

Índice de anexos

Índice de figuras

Capítulo 1

Introdução

1.1 – Motivação e pertinência do estudo

De acordo com o Ministério da Educação (2001), é pressuposto que o estudante é agente da sua própria aprendizagem, propondo-se uma metodologia geral em que:

• Os conceitos são construídos a partir da experiência de cada um e de situações concretas;
• Os conceitos são abordados sob diferentes pontos de vista e progressivos níveis de rigor e formalização;
• Se estabelece maior ligação da Matemática com a vida real, com a tecnologia e com as questões abordadas noutras disciplinas, ajudando a enquadrar o conhecimento numa perspectiva histórico-cultural.

Neste contexto, o programa destaca a importância das actividades a seleccionar, as quais deverão contribuir para o desenvolvimento do pensamento científico, levando o estudante a intuir, conjecturar, experimentar, provar, avaliar e ainda para o reforço das atitudes de autonomia e de cooperação (Ministério da Educação, 2001, p. 10).

Actualmente, só é possível atingir as competências e os objectivos gerais do programa de Matemática A, através do recurso à dimensão gráfica, e essa dimensão só é plenamente atingida quando os estudantes trabalham com uma grande quantidade e variedade de gráficos com apoio de tecnologia adequada (calculadoras gráficas e computadores). Não se trata aqui de substituir o cálculo de papel e lápis pelo cálculo com apoio da tecnologia, mas sim combinar adequadamente os diferentes processos de cálculo, sem esquecer o cálculo mental. Particularmente, em relação ao uso obrigatório das calculadoras gráficas, estas devem ser entendidas não só como instrumentos de cálculo mas também como meios incentivadores do espírito de pesquisa. Tendo em conta a investigação e as experiências realizadas até hoje, há vantagens em que se explorem com a calculadora gráfica os seguintes tipos de actividades matemáticas:

• Abordagem numérica de problemas;
• Uso de manipulações algébricas para resolver equações e inequações e posterior confirmação usando métodos gráficos;
• Uso de métodos gráficos para resolver equações e inequações e posterior confirmação usando métodos algébricos;
• Modelação, simulação e resolução de situações problemáticas;
• Uso de cenários visuais gerados pela calculadora para ilustrar conceitos matemáticos;
• Uso de métodos visuais para resolver equações e inequações que não podem ser resolvidas, ou cuja resolução é impraticável, com métodos algébricos;
• Condução de experiências matemáticas, elaboração e análise de conjecturas;
• Estudo e classificação do comportamento de diferentes classes de funções;
• Antevisão de conceitos do cálculo diferencial;
• Investigação e exploração de várias ligações entre diferentes representações para uma situação problemática (Ministério da Educação, 2001, p. 15; p.16).

No programa de Matemática A, é referido que os conhecimentos sobre funções, indispensáveis para a compreensão do mundo em que vivemos, vão ser ampliados com base no estudo analítico, numérico e gráfico, devendo ser privilegiado o trabalho intuitivo com funções que relacionam variáveis da vida corrente, da Geometria, da Física, da Economia ou de outras disciplinas. Em particular, faz-se o estudo detalhado de algumas funções polinomiais e da função módulo e resolvem-se analítica, gráfica e numericamente algumas equações e inequações (Ministério da Educação, 2001, p. 26).

Neste programa, também é dito que este tema tem uma ênfase muito grande na ligação entre as fórmulas e as representações geométricas, sendo esta ligação muito importante para todos os que utilizarem Matemática, pois, a capacidade de as relacionar é uma capacidade fundamental para o mundo de hoje e do futuro. Assim, este tema deverá fornecer uma formação para a vida toda, tão básica como a tabuada (Ministério da Educação, 2001, p. 26; p.27).

Neste trabalho de investigação na prática pedagógica, surgiu o meu interesse em desenvolver uma investigação sobre a influência da aprendizagem de funções no desenvolvimento do pensamento matemático. Assim, procurei observar, analisar e reflectir sobre as dificuldades apresentadas pelos alunos na utilização das várias representações de funções, nas traduções entre representações, e também na identificação de algumas dificuldades na interpretação dos dados fornecidos pela calculadora gráfica.

1.2 – Objectivo do estudo

O estudo que me proponho desenvolver tem como objectivo analisar os processos de raciocínio usados por alunos do 10.º ano de escolaridade na aprendizagem de funções, durante a resolução de tarefas de exploração e investigação, com recurso à utilização da calculadora gráfica. Deste objectivo, resultam as seguintes questões de investigação:

1. Como é que os alunos interpretam o conceito de função em diferentes representações (algébrica, gráfica, numérica e tabela)?
2. Qual a interpretação dos alunos sobre as propriedades das funções em diferentes representações? Em particular, quais os processos utilizados na passagem de uma representação para outra?
3. Quais as representações e processos utilizados pelos alunos na resolução de problemas em contextos de Matemática pura e de semi-realidade, com funções quadráticas?

Com esta investigação, espero contribuir para o meu próprio desenvolvimento pessoal e profissional, e também para a discussão no seio da comunidade de professores, no sentido de se encontrar estratégias e metodologias de ensino válidas, de forma a melhorar o ensino da unidade curricular "Funções", no 10.º ano de escolaridade.

1.3 – Organização do estudo

Esta investigação está organizada em sete capítulos. Neste primeiro capítulo, é referida a pertinência do estudo e é indicado o seu objectivo. No segundo capítulo, abordo a teoria da reificação, da autora Anna Sfard, descrevo alguns processos mentais envolvidos no pensamento matemático, com principal destaque para a visualização, enuncio as características fundamentais e os elementos constitutivos do saber matemático, e, por último, escrevo sobre o conceito de problema e a importância da utilização das tecnologias nas aulas de Matemática. No terceiro capítulo, apresento as opções metodológicas deste estudo, descrevo o design da investigação, a planificação dos temas, as fases do estudo e os participantes, e indico os modos de recolha e análise de dados, assim como, os instrumentos utilizados. Nos três capítulos que se seguem, apresento a análise dos dados relativos a cada um dos três alunos objecto de estudo de caso. Por fim, no capítulo sete, apresento uma síntese do presente estudo, bem como, as suas principais conclusões em função das questões de investigação, e faço uma reflexão pessoal sobre a concretização do estudo.

Capítulo 2

O desenvolvimento do pensamento matemático

Este capítulo é dedicado à explicitação da teoria da reificação, de Anna Sfard, que é uma teoria cognitiva relacionada com a natureza dupla dos conceitos matemáticos. Também é realizada uma breve descrição dos processos mentais envolvidos no pensamento matemático, dos quais se destaca a visualização. Em relação ao saber matemático, são enunciadas as suas características fundamentais e os seus elementos constitutivos. Finalmente, aborda-se o conceito de problema e a importância da utilização das tecnologias nas aulas de Matemática.

Este capítulo tem como principal objectivo responder a alguns dos problemas revelados pelos alunos no estudo e na aprendizagem das funções.

2.1 – A teoria da reificação

A teoria da reificação de Anna Sfard fundamenta-se numa perspectiva que considera ser possível conceber a maioria dos conceitos matemáticos de duas formas fundamentalmente diferentes: estruturalmente, como objectos, e operacionalmente, como processos (Sfard, 1991).

As preocupações de natureza educacional, que se prendem com a tomada de consciência das dificuldades dos estudantes na construção dos conceitos matemáticos, conduziram ao desenvolvimento desta perspectiva. De modo a analisar a influência desta particularidade na aprendizagem e no pensamento matemático, Sfard indica a necessidade de uma teoria unificada que envolva simultaneamente a Filosofia e a Psicologia da Matemática, e que dê a mesma atenção ao 'pensamento matemático' enquanto processo (*mathematical thinking*) e enquanto produto (*mathematical thought*). Para isso, procura um "*insight*" filosófico sobre a natureza dos conceitos matemáticos, de modo a compreender com profundidade os processos psicológicos no seio dos quais tais conceitos emergem (Sfard, 1991, p. 2). Esta autora elabora, assim, uma perspectiva de natureza ontológica-psicológica combinada (já que tenta considerar em simultâneo a natureza das entidades matemáticas – aspecto ontológico – quando estas são compreendidas pelo indivíduo cognoscente – perspectiva psicológica).

Para além disso, segundo Sfard, as duas concepções matemáticas referidas inicialmente são complementares, pois, os termos operacional e estrutural, embora extremamente diferentes, referem-se a facetas inseparáveis da mesma coisa (Sfard, 1991, p. 9), sendo ambas necessárias e reciprocamente dependentes, assim, como, indispensáveis para uma compreensão profunda da Matemática.

Estes dois argumentos – natureza ontológica-psicológica combinada e complementar – justificam, segundo a autora, a existência de uma dualidade na abordagem dos conceitos matemáticos, ou seja, justificam a existência de dois modos essencialmente diferentes de conceber uma entidade matemática:

(i) Uma concepção estrutural, segundo a qual, as noções matemáticas são tratadas como se se referissem a entidades como objectos reais, como estruturas estáticas permanentes que existem algures no espaço e no tempo, que podem ser manipuladas de acordo com certas regras e combinadas em estruturas mais complexas;

(ii) Uma concepção operacional onde as noções matemáticas são concebidas como um produto de certos processos que é necessário efectuar, ou são identificadas com os próprios processos (Sfard, 1991).

Vários exemplos de conceitos que podem ser definidos – e portanto concebidos – estrutural ou operacionalmente (Sfard, 1991, p. 5) encontram-se na figura 2.1.

	Estrutural	**Operacional**
Função	Conjunto de pares ordenados (Bourbaki, 1934)	Processo computacional ou um método bem definido de obter um sistema a partir de um outro (Skemp, 1971)
Simetria	Propriedade de uma figura geométrica	Transformação de uma figura geométrica
Número natural	Propriedade de um conjunto ou a classe de todos os conjuntos com a mesma cardinalidade finita	0 (zero) ou qualquer número que resulte da adição de um com um número natural ([o resultado de] contar)
Número racional	Par de inteiros (um elemento de um conjunto de pares especialmente definido)	[o resultado da] Divisão de inteiros
Circunferência	A localização de todos os pontos equidistantes de um dado ponto	[a curva obtida por] rotação de um compasso em torno de um ponto fixo

Figura 2.1 – Noções matemáticas do tipo estrutural e operacional (Sfard, 1991, p. 5)

Esta dualidade processo–objecto pode ser percebida em vários tipos de representações simbólicas e também nas descrições verbais ou definições dos conceitos. Vejamos como três representações diferentes da correspondência $y=3x^4$ podem encorajar diferentes abordagens (Sfard, 1991).

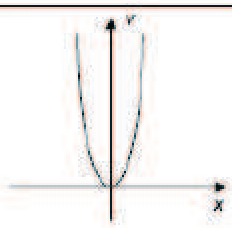
Gráfico	Expressão algébrica	Programa de computador
	$y = 3x^4$	10 INPUT X 20 Y = 1 30 FOR I = 1 TO 4 40 Y = Y*X 50 NEXT I 60 Y = 3*Y

Figura 2.2 – Diferentes representações de uma função (Sfard, 1991, p. 6)

Neste exemplo, a representação gráfica parece apelar a uma concepção estrutural já que as infinitas componentes da função são combinadas numa linha contínua, podendo ser compreendidas simultaneamente como um todo integrado – a parábola (Sfard, 1991, p. 6). O programa de computador, por outro lado, encoraja uma concepção operacional, pois apresenta a função como uma sequência de acções. Por sua vez, a representação algébrica parece permitir facilmente as duas abordagens: a operacional – enquanto descrição sucinta de alguns cálculos – e a estrutural – enquanto relação estática entre duas grandezas (Sfard, 1991). A figura 2.3 resume as características principais das duas abordagens.

A dualidade processo – objecto é defendida por Anna Sfard como inerente à maioria dos conceitos matemáticos, quer sob o ponto de vista histórico – onde a análise de vários exemplos lhe permitiram concluir que muitas noções matemáticas foram concebidas operacionalmente antes de terem sido definidas estruturalmente (Sfard, 1991), quer do ponto de vista psicológico – onde a evidência aponta no mesmo sentido, isto é, a concepção operacional é a primeira a emergir, permitindo depois, através da reificação dos processos, o desenvolvimento dos objectos matemáticos. Esta transição, das operações para os objectos abstractos, é um processo longo e difícil, realizável em três fases:

(i) Interiorização – os processos são realizados em objectos matemáticos já familiares;

(ii) Condensação – os processos anteriores são transformados em unidades compactas autónomas;

(iii) Reificação – é adquirida uma capacidade para ver estas novas entidades como objectos permanentes por direito próprio (Sfard, 1991). Comum às duas perspectivas está o princípio básico da precedência da concepção operacional sobre a estrutural.

	Concepção operacional	Concepção estrutural
Características gerais	A entidade matemática é concebida como um produto de certo processo ou é identificada com o próprio processo	A entidade matemática é concebida como uma estrutura estática – como se fosse um objecto real
Representações internas	É apoiada por representações verbais	É apoiada por imagens visuais
O seu lugar no desenvolvimento de conceitos	Desenvolve-se na primeira fase da formação do conceito	Desenvolve-se a partir da concepção operacional
O seu papel nos processos cognitivos	É necessária mas não suficiente para uma eficaz aprendizagem e resolução de problemas	Facilita todos os processos cognitivos (aprendizagem, resolução de problemas, etc.)

Figura 2.3 – As concepções operacional e estrutural – Sumário (Sfard, 1991, p. 33)

Vejamos o papel das concepções operacional e estrutural na formação do conceito de função, primeiro, numa perspectiva histórica, depois, numa perspectiva psicológica.

Perspectiva histórica

O desenvolvimento histórico do conceito de função é evocado pela autora com um objectivo duplo: exemplificar a existência da já mencionada dualidade conceptual na génese dos conceitos matemáticos e mostrar a precedência da concepção operacional sobre a estrutural. Assim, na construção do edifício matemático, a concepção operacional emerge primeiro e os objectos matemáticos desenvolvem-se depois, através da reificação dos processos (Sfard, 1991). Para chegar a esta conclusão, Anna Sfard analisou a evolução do conceito de função em direcção à reificação, a partir do século XVII até à actualidade (Sfard, 1992, p. 62):

A ideia central ao conceito de função, embora rudimentar por mais de 4000 anos, tomou forma, tendo emergido de maneira explícita, no final do século XVII. A sua evolução, intimamente associada aos problemas do cálculo e da análise estudados na época, fica-se a dever essencialmente à extensão do conceito de número (real e complexo), à criação da álgebra simbólica, ao estudo do movimento como o problema central das ciências, à junção da álgebra e da geometria, etc. A matematização das ciências e a invenção da geometria analítica permitiram uma perspectiva dinâmica das relações funcionais, a introdução de variáveis e a expressão das relações entre variáveis através de equações. Consideram-se três fases principais, no desenvolvimento da ideia de função, até meados do século XIX:

- **(i)** Antiguidade: estudam-se casos particulares de dependência entre duas quantidades, mas as noções de quantidades variáveis e de função ainda não aparecem isoladas;
- **(ii)** Idade Média: estas noções são definitivamente expressas pela primeira vez nas formas geométrica e analítica, mas, cada caso concreto de dependência entre duas quantidades é definida por uma descrição verbal ou por um gráfico;
- **(iii)** O Período Moderno: com início nos finais do século XVI e, particularmente, no século XVII – começam a prevalecer as expressões analíticas de funções; em meados do século XVIII, esta interpretação (função como expressão analítica) mostra-se inadequada e é substituída por uma nova definição geral; na segunda metade do século XIX, esta definição geral permitiu o desenvolvimento da teoria de funções mas foi contrariada por dificuldades lógicas que no século XX fizeram com que a essência do conceito de função fosse reconsiderada.

Segundo Sfard, as primeiras descrições do conceito, fortemente associadas a uma álgebra simbólica então recente, são já uma tentativa no sentido da reificação (Sfard, 1991). As definições de Jean Bernoulli (1667-1748) – chamamos função de uma grandeza variável a uma quantidade composta de um modo qualquer a partir desta grandeza variável e de grandezas constantes – e de Leonhard Euler (1707-1783) – uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de um modo qualquer a partir da quantidade variável e de números ou de quantidades constantes – usaram entidades algébricas para impor, a quantidades variáveis, a estabilidade de objectos. Contudo, esta estabilidade viria a revelar-se insuficiente para garantir o estatuto de "coisa" real à noção de função. A expressão analítica, em torno da qual ambas as definições estão organizadas, embora permitisse o desenvolvimento de uma concepção estrutural (a expressão analítica pode ser entendida como uma relação estática entre duas grandezas), envolvia um conceito – o de variável – que parecendo já, na época, um objecto real, sobre o qual podiam ser realizados processos (funções), tinha, afinal, escapado à reificação (Sfard, 1991): falar de letras como se fossem “coisas” reais não parecia matematicamente puro; o símbolo deveria esconder alguma entidade abstracta cuja natureza não era, de todo, clara.

O problema da não reificabilidade das definições de Bernoulli e Euler residiu, exactamente, no facto de estas se basearem na noção de variável. Euler, tendo eventualmente consciência de que as noções subjacentes à sua definição original eram um tanto ou quanto vagas, substituiu o termo “expressão analítica” por outros, de modo a evitar a noção de variável (Sfard, 1991). No ano de 1755, a sua nova definição é a seguinte:

Se algumas quantidades dependem de outras quantidades, de modo que, se estas variam, as primeiras variam, então chamamos às primeiras quantidades funções das últimas. Esta designação é de natureza mais ampla e compreende qualquer método, por meio do qual, uma quantidade pode ser determinada por outras. Se, por conseguinte, x denota uma quantidade variável, então todas as quantidades que dependem de algum modo de x, ou por ele são determinadas, são chamadas funções de x.

Esta última definição, comenta Sfard, é explicitamente operacional, pois, enfatiza a dimensão dinâmica do conceito de função. O conceito de variável foi atravessando diversas interpretações sem que nenhuma lhe tenha permitido atingir a posição de objecto matemático legítimo. Usando a terminologia desta autora, o conceito acabaria por ser rejeitado por ser inerentemente dependente do tempo e, por isso, ser não reificável (Sfard, 1991).

Uma outra tentativa de converter processos em objectos foi a identificação de funções com curvas bidimensionais (no plano). No entanto, refere a autora, nem as expressões algébricas nem as representações gráficas foram muito eficazes nesse sentido. Falhados estes três modos de reificação do conceito – uma noção puramente operacional de variável e duas representações, algébrica e gráfica, não eficazes – e tendo este adquirido um estatuto de noção indispensável, procurava-se ainda uma solução. Esta solução foi iniciada pela ideia de correspondência arbitrária, de Peter

Dirichlet (1805-1859). Finalmente, o conceito de função chegaria à sua fase puramente estrutural com a definição de conjunto de pares ordenados, de Nicolas Bourbaki.

Em resumo, através de uma breve análise das diferentes definições que o conceito de função foi assumindo ao longo dos últimos três séculos, podemos concluir que a formulação contemporânea do conceito é estrutural e que foi evoluindo gradualmente de noções concebidas operacionalmente. Esta evolução é, nas palavras de Sfard, uma longa luta pela reificação: o que parece ser um processo num nível, tem que ser transformado num objecto abstracto autónomo num nível mais elevado, para poder funcionar como uma unidade básica em construções matemáticas mais avançadas. A abordagem estrutural será, portanto, a fase mais avançada do desenvolvimento conceptual.

Perspectiva psicológica

Relativamente ao processo de aprendizagem, Sfard defende um modelo de formação conceptual algo semelhante ao que é possível construir com base no desenvolvimento histórico de vários conceitos matemáticos.

A precedência da concepção operacional sobre a estrutural é apresentada como uma característica invariante do processo de aprendizagem individual, que parece imune à variação externa de estímulos. Por outras palavras, não se defende que a aprendizagem se processa de igual modo em todos os indivíduos, mas que parece ser possível identificar, nos diferentes processos de aprendizagem e independentemente das abordagens de ensino utilizadas, algo que lhes é comum: face a uma nova noção matemática, a concepção operacional é normalmente a primeira a ser desenvolvida (e, não raramente, a única) e a transição, das operações para os objectos abstractos, é um processo longo e difícil, realizável em três fases: interiorização, condensação e reificação (Sfard, 1991).

Na primeira fase – interiorização – o aluno estabelece contacto com certos processos, que eventualmente darão origem a um novo conceito e que são operações realizáveis com objectos matemáticos elementares e já familiares (por exemplo, no caso das funções, as manipulações algébricas podem assumir esse papel). Estes processos vão-se tornando cada vez mais acessíveis para o indivíduo, à medida que este vai gradualmente desenvolvendo as necessárias destrezas à sua realização, até ao ponto de ser capaz de pensar sobre o que aconteceria sem ter realmente de os efectuar. Considera-se que o processo foi interiorizado quando puder ser realizado mentalmente (através de representações mentais) e quando, para poder ser considerado, analisado e comparado, não precisar de ser efectuado no momento (Sfard, 1991). No caso do conceito de função, nesta fase é aprendida a noção de variável e adquire-se a capacidade de usar uma fórmula para encontrar valores da variável dependente (Sfard, 1991, p. 19).

Na segunda fase – condensação – os processos anteriores, eventualmente complicados ou longos, são comprimidos emergindo em entidades autónomas, facilmente manipuláveis. O aluno desenvolve a capacidade de pensar sobre um dado processo como um todo, em termos de informação inicial – resultado final (*input - output,* ou, *entrada – saída*, em português), sem necessidade de atender ao que medeia os dois estados (inicial e final). É o momento oficial de nascimento do novo conceito (Sfard, 1991). Considera-se que há evolução nesta fase quando o indivíduo for capaz de facilmente combinar um processo com outros processos já conhecidos, estabelecer comparações, generalizar e alternar entre diferentes representações dum conceito. A permanência na fase de condensação dura enquanto a nova entidade matemática permanecer fortemente ligada a um certo processo. No caso das funções, o progresso do aluno nesta fase poderá ser observado pela facilidade com que ele for capaz de trabalhar com uma correspondência como um todo, sem necessidade de olhar para os seus valores específicos. Eventualmente, o aluno estará apto a investigar funções, desenhar os seus gráficos, combinar pares de funções (por exemplo, por composição), até encontrar o inverso de uma dada função (Sfard, 1991, p. 19).

Em relação à terceira fase, a reificação acontece quando o indivíduo conseguir, subitamente, ver a nova entidade matemática como um objecto completo e autónomo com significado próprio, um membro particular de uma certa categoria, uma estrutura estática e permanente com características próprias, um todo integrado já afastado dos processos que lhe deram origem. Neste caso, diz-se que o conceito foi reificado. Esta última fase é algo que acontece de uma forma instantânea (não gradual), é uma mudança ontológica – uma súbita capacidade de ver algo familiar numa perspectiva completamente nova (Sfard, 1991, p. 19). Uma vez reificado, o conceito pode servir de base à formação de novos conceitos de nível superior. A existência, para o indivíduo, de um novo objecto matemático, permite que todo um novo ciclo se inicie – a reificação desta entidade inicia a fase de interiorização para a formação de uma nova entidade mais abrangente (Sfard, 1991). A figura 2.4 resume estas ideias.

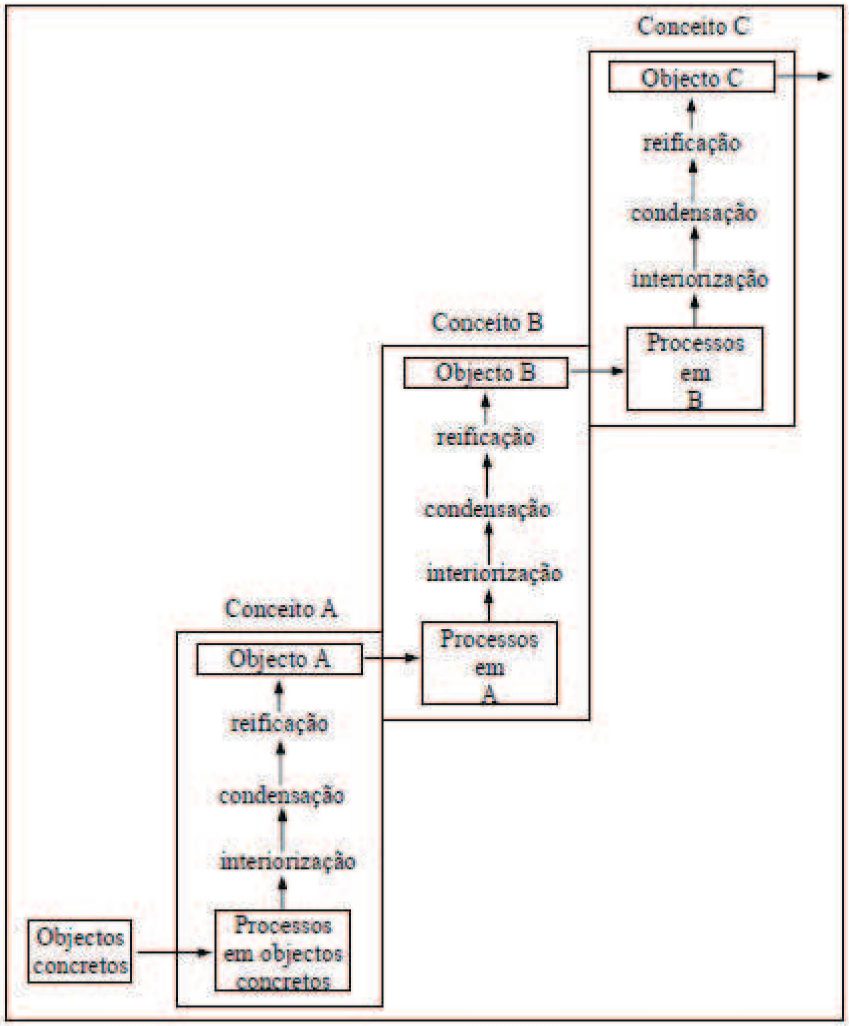


Figura 2.4 – Modelo geral da formação do conceito (Sfard, 1991, p. 22)

Este esquema de três fases é um modelo hierárquico cuja natureza está implícita nas definições de interiorização, condensação e reificação, o que implica que um patamar não pode ser alcançado antes que os outros tenham sido ultrapassados. No caso das funções, podemos dizer que o conceito foi reificado pelo aluno quando este tiver plena compreensão das diversas representações que uma função pode assumir (passando facilmente de uma representação a outra), quando for capaz de resolver equações funcionais (onde as incógnitas são funções), quando revelar capacidade de falar acerca de propriedades gerais de diferentes processos realizados com funções (tais como composição ou inversão) e pelo derradeiro reconhecimento de que os cálculos algébricos não são uma característica necessária dos conjuntos de pares ordenados que definem funções (Sfard, 1991, p. 20).

Os alunos, por vezes, não são capazes de lidar com o objecto invisível e desenvolvem uma abordagem quasi-estrutural. A reificação é, de facto, um processo bastante complicado que não está ao alcance de todos os alunos do ensino secundário.

O processo de reificação junto de alunos

Sem reificação as concepções matemáticas permanecerão puramente operacionais. Mas será a concepção estrutural realmente necessária?
Aparentemente, comenta a autora, parece não haver nada de errado com as abordagens operacionais visto ser possível apresentar e manipular cada noção matemática, teorema e prova, em termos puramente operacionais. No entanto, se pensarmos, por exemplo, no processo de aprendizagem e nos seus objectivos, as duas abordagens – operacional e estrutural – são imprescindíveis (Sfard, 1991).

De facto, o conhecimento operacionalmente concebido só pode ser armazenado em esquemas cognitivos sequenciais não estruturados e, por isso, inadequados à dimensão da nossa memória de trabalho. Este modo de guardar este tipo de informação faz com que as ideias puramente operacionais tenham que ser processadas de uma forma fragmentada, isto é, de uma maneira lenta que pode levar a um maior esforço cognitivo e ao sentimento perturbador de uma compreensão só local e, por isso, insuficiente. Estas sequências têm que ser compactadas em unidades autónomas (ou reificadas) de forma a dotar os esquemas cognitivos de uma estrutura hierárquica: a informação operacional na base da pirâmide (o primeiro passo na aquisição de novas noções) e as representações estruturais – resultantes do processo de reificação – constituindo os níveis mais elevados (Sfard, 1991).

Embora o processo de reificação seja difícil de atingir, uma vez conseguido, facilita a realização matemática – diminui a dificuldade e aumenta a manipulabilidade. A transição do operacional ao estrutural pode ser simplisticamente comparado ao que acontece quando uma pessoa que está a transportar na mão muitos objectos diferentes e soltos, decide pôr toda a carga num saco. No caso específico do conceito de função, a luta pela reificação foi longa para os matemáticos, e parece interminável para os alunos.

Para ver uma função como um objecto é necessário tentar manipulá-la como um todo: não há razão para tornar um processo em objecto a não ser que tenhamos alguns processos de nível mais elevado realizados sobre este processo mais simples. Mas existe aqui um ciclo vicioso: por um lado, sem uma tentativa de interiorização de nível mais elevado, a reificação não ocorrerá; por outro, a existência de objectos sobre os quais são realizados processos de nível mais elevado, parece indispensável para a interiorização – sem tais objectos os processos parecerão sem significado. Por outras palavras: a reificação de nível mais baixo e a interiorização de nível mais elevado são pré-requisitos uma da outra (Sfard, 1991, p. 31).

Anna Sfard dá-nos conta de algumas das dificuldades evidenciadas pelos alunos, face ao conceito de função, reveladoras da não reificação do conceito. Por exemplo:

(i) um grande número de alunos concebe função como um processo e não como uma construção estática (os alunos associam função a processos de cálculo);

(ii) a função constante é também fonte de dificuldades (parece estar implícito, no pensamento dos alunos, que uma mudança na variável independente deve ser seguida por uma mudança na variável dependente – dimensão dinâmica do conceito);

(iii) há uma relutância, por parte dos alunos, em aceitar correspondências arbitrárias como funções (a maioria dos alunos tende a considerar, como verdadeiras, afirmações do tipo: "Toda a função expressa uma certa regularidade" e "Toda a função pode ser expressa por uma certa fórmula algébrica")

(iv) há uma tendência para identificar o conceito com uma das suas representações.

Embora a concepção estrutural (reificação) seja difícil de atingir, a reificação deve ser estimulada junto dos alunos. No que diz respeito ao ensino, e tendo em consideração o modelo de formação conceptual apresentado, dois princípios didácticos devem ser seguidos:

(i) os novos conceitos não devem ser introduzidos aos alunos em termos estruturais;

(ii) a concepção estrutural não deve ser exigida enquanto não se tornar indispensável para os alunos (Sfard, 1991).

2.2 – Processos mentais envolvidos no pensamento matemático

A natureza do pensamento matemático está interligada aos processos cognitivos que dão origem ao conhecimento matemático. O pensamento matemático envolve diferentes processos de pensamento tal como é assinalado por Dreyfus (1991): processos envolvidos na representação de conceitos e de propriedades (o processo de representação–visualização, a mudança de representações e a tradução de uma formulação de um problema ou frase matemática para uma outra formulação, a modelação), processos envolvidos na abstracção (generalização e síntese são pré-requisitos básicos para a abstracção), processos que estabelecem relações entre o representar e o abstrair, e ainda processos que podem incluir entre outros a descoberta, a intuição, a verificação, a prova e a definição. Dreyfus (1991) expressa também que:

- Em muitos processos, relevantes para a compreensão da aprendizagem e do pensamento em Matemática, os seus aspectos matemáticos e psicológicos podem ser raramente separados entre si. Por exemplo, quando construímos um gráfico de uma função, nós executamos um processo matemático, seguindo certas regras que podem ser postas em linguagem matemática; ao mesmo tempo estamos provavelmente a gerar uma imagem mental visual desse gráfico, isto é, nós estamos a visualizar a função duma forma que mais tarde nos ajudará a raciocinar sobre a função. As imagens mentais e as imagens matemáticas estão intimamente ligadas aqui. É precisamente esta ligação entre a Matemática e a Psicologia que tornam os processos interessantes e relevantes para a compreensão da aprendizagem e do pensamento em Matemática.

- Muitos dos processos mentais da Matemática sobre conceitos elementares, como por exemplo, número e valor de posição (o valor de posição é uma convenção segundo a qual cada algarismo representa uma unidade de tamanho diferente, de acordo com a posição ocupada no número. No numero 333, por exemplo, o primeiro algarismo significa 300, o segundo 30, e o último 3) estão já presentes no pensamento das crianças. Os processos mentais não são exclusivamente usados em Matemática. Abstracções são feitas em Física, representações são usadas em Psicologia, análises são usadas em Economia e visualização em Arte.

2.3 – Visualização

O processo do pensamento matemático que intervém com mais incidência no estudo da geometria é normalmente designado por visualização. Visualização é um processo pelo qual as representações mentais ganham existência, diz Dreyfus (1991). Mariotti e Pesci (1994) chamam à visualização o pensar que é espontaneamente acompanhado e apoiado por imagens. Zimmermann e Cunningham (1991) dizem que a visualização está relacionada com os mais diversos ramos da Matemática e é multifacetada – com raízes na Matemática e com aspectos históricos, filosóficos, psicológicos, pedagógicos e tecnológicos importantes. Na literatura, definições e reflexões sobre visualização, evidenciam diferentes significados ligados quer à Matemática, à investigação científica, à Educação Matemática e à Psicologia. Porém, comummente concordam que visualização se foca na percepção e na manipulação de imagens visuais.

2.4 – O saber matemático

2.4.1 – Características fundamentais do saber matemático

A Matemática é uma ciência em permanente evolução, com um processo de desenvolvimento ligado a muitas vicissitudes, dilemas e contradições (Ponte, 1988). Pode ser encarada como um corpo de conhecimento, constituído por um conjunto de teorias bem determinadas (perspectiva da Matemática como "produto"; algumas teorias que fazem parte deste conjunto são as seguintes: aritmética, álgebra, análise infinitesimal, teoria das probabilidades, teoria dos conjuntos, topologia, geometria diferencial, análise funcional) ou como uma actividade (constituída por um conjunto de processos característicos, tais como, definir, exemplificar, representar conjecturar, testar, especializar, generalizar, demonstrar). Pode-se ainda argumentar que tanto o produto como o processo são igualmente importantes, e só fazem sentido se equacionados em conjunto. Será impossível nesse caso explicar a alguém o que é a Matemática sem apresentar um exemplo em que simultaneamente se usem os seus processos próprios e se ilustre com conceitos de uma das suas teorias.

A Matemática é um saber científico. Distingue-se das outras ciências pelo facto de que enquanto nestas a prova de validade decisiva é a confrontação com a experiência, na Matemática esta prova é dada pelo rigor do raciocínio. O carácter preciso e formal dos argumentos matemáticos permite-lhes resistir à crítica mesmo quando são bastante complexos (Schwartz, 1978). Os argumentos das restantes ciências são também precisos, mas, uma vez que estão sujeitos ao confronto com a experiência, o seu carácter tende a ser menos formalizado.

Podemos assim enunciar quatro características fundamentais do conhecimento matemático: a formalização segundo uma lógica bem definida, a verificabilidade, que permite estabelecer consensos acerca da validade de cada resultado, a universalidade, isto é, o seu carácter transcultural e a possibilidade de o aplicar aos mais diversos fenómenos e situações, e a generatividade, ou seja, a possibilidade de levar à descoberta de coisas novas.

A natureza formalizada da Matemática constitui um dos mais sérios obstáculos à sua aprendizagem (como já bem se apercebia por exemplo Sebastião e Silva, 1964/1975). No ensino desta disciplina há uma tendência permanente para resvalar para uma formalização prematura. Uma alternativa é apresentar uma Matemática tão desformalizada quanto possível, insistindo no uso de materiais concretos, evitando o mais possível o uso de símbolos, aprofundando pouco os diversos assuntos e não apresentando demonstrações. Outra é reconhecer a formalização como inevitável, mas procurar encontrar formas de a tornar acessível aos alunos (Pólya, 1965/1981, p. 104; Papert, 1980; Noss, 1988/91). Por exemplo, Noss (1988/91) considera que a especificidade do saber matemático está no tipo de formalismo que lhe está associado. Defende a tese que a tecnologia, devidamente utilizada, pode constituir ambientes matemáticos nos quais a matematização tem a possibilidade de ocorrer naturalmente e sugere que o computador virá a constituir por isso mesmo uma significativa influência cultural.

No entanto, há que reconhecer que, apesar de tudo, o modo de lidar com a formalização constitui ainda um problema mal conhecido.

2.4.2 – Elementos constitutivos do saber matemático

Segundo Ponte (*Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação*, 1992), podemos distinguir quatro níveis de competências no saber matemático, de acordo com a sua função e nível de complexidade. Teremos assim as competências elementares, intermédias e complexas, e os saberes de ordem geral (ver figura 2.5).

Competências elementares
▪ Conhecimento de factos específicos e terminologia ▪ Identificação e compreensão de conceitos ▪ Capacidade de execução de "procedimentos" ▪ Domínio de processos de cálculo ▪ Capacidade de "leitura" de textos matemáticos simples ▪ Comunicação de ideias matemáticas simples

Competências intermédias
▪ Compreensão de relações matemáticas (teoremas, proposições) ▪ Compreensão de uma argumentação matemática ▪ A resolução de problemas (nem triviais, nem muito complexos) ▪ A aplicação a situações simples

Competências avançadas (ou de ordem superior)
▪ A exploração/investigação de situações; a formulação e teste de conjecturas ▪ A formulação de problemas ▪ A resolução de problemas (complexos) ▪ Realização e crítica de demonstrações ▪ Análise crítica de teorias matemáticas ▪ A aplicação a situações complexas/modelação

Saberes de ordem geral
▪ Conhecimentos dos grandes domínios da Matemática e das suas inter-relações ▪ Conhecimento de aspectos da história da Matemática e das suas relações com as ciências e a cultura em geral ▪ Conhecimento de momentos determinantes do desenvolvimento da Matemática (grandes problemas, crises, grandes viragens)

Figura 2.5 – Elementos constitutivos do saber matemático

As competências elementares implicam processos de simples memorização e execução. As competências intermédias implicam processos com certo grau de complexidade, mas não exigem muita criatividade. As competências complexas implicam uma capacidade significativa de lidar com situações novas. Finalmente, os saberes de ordem geral incluem os meta–saberes, ou seja, saberes com influência nos próprios saberes e as concepções. Enquanto os três primeiros níveis representam uma progressão em termos de complexidade natural, o quarto desempenha um papel essencialmente regulador.

Não custa a admitir que o trabalho num nível mobilize naturalmente saberes e competências dos níveis anteriores. Mas enquanto para a aquisição dos saberes no primeiro nível pode ser conveniente uma certa individualização dos conceitos, tanto no segundo como no terceiro é essencial a consideração da sua globalidade, o que torna particularmente importantes as experiências de aprendizagem estendidas no tempo, conduzidas com uma certa continuidade e profundidade.

As actividades fundamentais em que se desenvolve o saber matemático são a acção e a reflexão. A acção tem a ver com a manipulação de objectos e, muito especialmente, de representações (Em Matemática é particularmente frutuosa a interacção entre diversas formas de representação, sendo as mais fundamentais, pelo menos nos ensinos básico e secundário, as representações numérica, gráfica e algébrica). A reflexão consiste no pensar sobre a acção, e é estimulada pelo esforço de explicação e pela discussão (daí a importância da comunicação e da interacção). Quanto mais a aprendizagem se desenvolve em função de objectivos definidos e assumidos pelo próprio indivíduo, mais situações dos níveis mais avançados tendem a aparecer e a ser enfrentadas, e mais sólida e profunda ela tende a ser (em contraste com o caso em que a aprendizagem se processa seguindo meramente um percurso balizado e conduzido por outrem).

No entanto, não é o envolvimento do indivíduo o único factor que condiciona o desenvolvimento do saber matemático. Outros factores constituem igualmente seus condicionantes, incluindo os factores mais gerais de ordem cultural, de ordem social (classe social, família, micro-grupo a que pertence o indivíduo), de ordem institucional (escola e outros espaços de aprendizagem da Matemática), e as capacidades de ordem individual.

2.5 – O conceito de problema

Santos e Ponte (2002) afirmam que um problema é uma dificuldade, não trivial, que se pretende ultrapassar. A noção de problema, no entanto, pode ser encarada de diversas maneiras. Alguns autores tomam como referência a relação do indivíduo com a situação, enquanto que outros concentram a sua atenção nas características da própria tarefa. No primeiro caso, o foco é o indivíduo – uma dada situação pode ser um problema para uma pessoa e não o ser para outra. Esta abordagem é subscrita por Saviani (1985), que identifica a necessidade/intencionalidade como a essência do problema, e também por Schoenfeld (1985) e Kantowski (1980), que privilegiam o facto da pessoa ter de lidar com uma situação para si desconhecida. No segundo caso, uma dada situação será um problema se possuir um conjunto de características que se presumem problemáticas para todos os membros de um certo grupo relativamente alargado de indivíduos. Neste caso, a situação é um problema independentemente do indivíduo ou da sua experiência pessoal passada. Podemos incluir neste grupo Smith (1991), que refere as actividades mentais que a tarefa implica no indivíduo (análise e raciocínio), Shulman e Tamir (1973) e Borasi (1986), que partem de critérios associados à própria tarefa.

2.6 – A importância da utilização das tecnologias nas aulas de Matemática

Ponte (*The history of the concept of function and some educational implications*, 1992) refere que a maioria dos alunos chega ao ensino secundário com muitas dificuldades no pensamento abstracto. Para muitos, lidar com gráficos cartesianos e expressões algébricas não é uma tarefa fácil. O ensino de funções deve articular, de forma equilibrada, as três formas de representação mais importantes, ou seja, as formas numérica, gráfica e algébrica.

A capacidade de lidar com expressões algébricas não é suficiente para resolver problemas reais. Os alunos precisam ter oportunidades para a prática e reflexão sobre a resolução de problemas significativos. Neste contexto, a tecnologia pode desempenhar um papel educacional importante, mudando o foco dos processos mecânicos e repetitivos para a compreensão da álgebra e do cálculo como instrumentos que permitem a modelagem de situações reais. A tecnologia pode ser utilizada para realizar as manipulações ou obter as soluções no âmbito dos modelos matemáticos, simplificação da rotina do trabalho e permitindo uma maior concentração nos aspectos que são verdadeiramente importantes para fazer e aprender Matemática: a compreensão do significado dos conceitos, a formulação de problemas, a compreensão de sua natureza, a elaboração de estratégias adequadas, e sua discussão aprofundada e análise crítica.

As aplicações mais usuais das tecnologias na aula de Matemática são ao nível do cálculo e das funções, que estará associado à tecnologia mais desenvolvida e comum nas escolas. As calculadoras gráficas e os computadores com softwares de manuseamento de funções (parâmetros e desenho de gráficos) podem ter um papel importante no estudo das funções. Por exemplo, a sobreposição de gráficos de várias funções, facilmente realizados com uma calculadora gráfica ou computador, possibilita o estudo da influência dos diversos parâmetros numa família de funções.

Também relacionado com as funções, mas não exclusiva deste conteúdo, está uma das principais vantagens associadas ao uso das tecnologias: as representações. Segundo Fey (1991), uma das grandes potencialidades dos computadores reside na facilidade em passar de uma forma de representação de informação para outra, enquanto se procura a compreensão conceptual de um problema e da sua solução.

A utilização das tecnologias também permite aos professores de Matemática diversificarem as actividades que sugerem aos alunos. Estas podem contribuir fortemente para uma abordagem investigativa da aprendizagem da Matemática, isto é, para a realização de investigações e explorações que implicam o desenvolvimento da capacidade de observação, do espírito crítico, a formulação e teste de conjecturas, a criação de argumentos convincentes e o desenvolvimento do raciocínio matemático (Ponte e Canavarro, 1997). A tecnologia aumenta o alcance e a qualidade das investigações porque providência meios de visualização de ideias matemáticas de múltiplas perspectivas (NCTM, 2000). A resolução de problemas também é favorecida pelo uso de tecnologias dado que proporcionam novas estratégias de resolução e permitem a abordagem de problemas com maior complexidade, isto é, de mais e melhores problemas realistas e relevantes, capazes de estimular o interesse dos alunos pela Matemática (Matos, Carreira, Santos e Amorim, 1994; Ponte, 1997; Ponte e Canavarro, 1997). Da mesma forma, a simulação e modelação são aspectos importantes da utilização das tecnologias. Os alunos são encorajados a fazer, testar, conjecturar, criar e avaliar modelos matemáticos, experimentando uma actividade matemática muito próxima da dos matemáticos (Carreira, 1992; Fey 1991). Contudo, as simulações e a modelação não devem substituir o estudo experimental (Ponte, 1997). "O papel das novas tecnologias, e em particular do computador, na construção e exploração de modelos matemáticos passa naturalmente pelas potencialidades de manipulação de múltiplas representações matemáticas e simbólicas que advêm da introdução de tais ferramentas." (Matos, 1994, p.9).

As tecnologias de informação e comunicação têm, geralmente, grande utilidade no desenvolvimento de trabalhos de projecto, funcionando como instrumento de apoio (elaboração de textos, realização de gráficos, etc.) ou mesmo de ferramenta principal se o objectivo do projecto passar, por exemplo, pelo desenvolvimento e aperfeiçoamento de um programa (Ponte, 1997). A utilização de tecnologias favorece a criação de novas dinâmicas na sala de aula, de ambientes de trabalho que estimulam a discussão e a partilha de ideias, que incentivam a formulação de conjecturas e a comunicação matemática (oral e escrita), nomeadamente através do tipo de dados e de argumentos usados pelos alunos, assim como a sua capacidade crítica perante argumentos alheios (Ponte e Canavarro, 1997).

O uso eficiente da tecnologia nas aulas de Matemática depende maioritariamente do professor, que deverá criar actividades matemáticas que tirem partido das vantagens do que a tecnologia faz bem e de forma eficiente (NCTM, 2000). No entanto, a tecnologia não pode substituir o professor de Matemática, nem tão pouco pode ser usada como uma substituição para compreensões básicas e intuições, e caberá sempre ao professor a importante decisão sobre quando e como usar tecnologia, assegurando-se que a sua utilização está a contribuir para o desenvolvimento e aperfeiçoamento do pensamento matemático dos alunos (NCTM, 2000; Ponte 1997).

Segundo o Princípio da Tecnologia estabelecido pelo National Council of Teachers of Mathematics (2000), os alunos podem aprender mais Matemática e mais profundamente com o uso apropriado e responsável de tecnologia. Esta influencia o modo como a Matemática é ensinada e aprendida, assim como, o que é ensinado e quando, atendendo a que os alunos podem debruçar-se sobre assuntos mais gerais, fazer e testar conjecturas e modelar e resolver problemas mais complexos anteriormente inacessíveis para eles, trabalhando a níveis de generalização e abstracção mais altos (NCTM, 2000). A tecnologia, para além de dar aos alunos a possibilidade e o poder necessário de resolver problemas mais difíceis, também lhes permite relacionar de forma mais intuitiva os vários domínios da Matemática, como a geometria, a álgebra, a estatística e situações reais e os modelos matemáticos correspondentes (Ponte, 1992).

A evolução tecnológica é vertiginosa e domina o dia–a–dia dos nossos alunos com máquinas cada vez mais poderosas e de simples utilização, que devidamente aproveitadas abrem novas possibilidades metodológicas, permitindo novas abordagens dos conteúdos curriculares.

Capítulo 3

Metodologia

Neste capítulo apresento as opções metodológicas deste estudo, caracterizadas por seguirem uma abordagem qualitativa na modalidade de estudo de caso. Faço uma descrição do design da investigação, da planificação dos temas, das fases do estudo e dos participantes seleccionados para esta investigação, e indico as principais técnicas de recolha de dados: entrevistas semi-estruturadas, observação participante de aulas e respostas dadas pelos alunos nas resoluções da tarefa de exploração e investigação, nos testes de avaliação e nas fichas de trabalho. Finalmente, descrevo os processos de análise de dados.

3.1 – Abordagem qualitativa como metodologia de investigação

Para a realização deste estudo foi adoptada uma metodologia de investigação de tipo qualitativo, pois, as suas características apontaram-na como particularmente adequada para o estudo que se pretendia realizar. Em traços gerais, pretendia-se estudar, pormenorizadamente, as diferentes questões formuladas a partir do ambiente natural dos participantes indo de encontro ao que é defendido na investigação qualitativa. Uma investigação deste tipo permite ao investigador, por um lado, estudar as questões seleccionadas em profundidade e detalhe e, por outro, investigar toda a complexidade dos fenómenos em contexto natural (Bogdan e Biklen, 1994).

Bogdan e Biklen (1994) destacam cinco características da investigação qualitativa:

1. A fonte directa de dados é o ambiente natural e o investigador é o instrumento principal de recolha de dados;

2. Os dados recolhidos são descritivos;

3. O interesse do investigador centra-se mais nos processos do que nos resultados ou produtos;

4. A análise dos dados é feita pelo investigador de uma forma indutiva;
5. O investigador interessa-se por compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências.

Estas características, apesar de poderem não estar presentes de igual modo num estudo, determinam em grande medida o tipo de investigação a realizar.

Estudo de caso

Ponte (1994) refere que um estudo de caso pode ser caracterizado como um estudo de uma entidade bem definida como um programa, uma instituição, um curso, uma disciplina, um sistema educativo, uma pessoa, ou uma unidade social. Visa conhecer em profundidade o seu "como" e os seus "porquês", evidenciando a sua unidade e a sua identidade próprias. É uma investigação que se assume como particularística, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única em muitos aspectos, procurando descobrir a que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global do fenómeno de interesse.

Características de um estudo de caso

Kilpatrick (1988) refere que um estudo de caso não constitui, só por si, uma metodologia de investigação bem definida. Ele é essencialmente um *design* de investigação que pode ser conduzida no quadro de paradigmas metodológicos bem distintos, como o positivista, o interpretativo ou o crítico.

Em primeiro lugar, trata-se de um tipo de pesquisa que tem sempre um forte cunho descritivo. O investigador não pretende modificar a situação, mas compreendê-la tal como ela é. Para isso apoia-se numa "descrição grossa" (*thick description*), isto é, factual, literal, sistemática e tanto quanto possível completa do seu objecto de estudo.

Em segundo lugar, este tipo de investigação não é experimental. Recorre-se a ele quando não se tem controlo sobre os acontecimentos e não é portanto possível ou desejável manipular as potenciais causas do comportamento dos participantes (Merrian, 1988; Yin, 1984).

Em terceiro lugar, um estudo de caso é uma investigação de natureza empírica. Baseia-se fortemente em trabalho de campo ou em análise documental. Estuda uma dada entidade no seu contexto real, tirando todo o partido possível de fontes múltiplas de evidência como entrevistas, observações, documentos e artefactos (Yin, 1984).

Em educação, e em particular na Educação Matemática, têm-se tornado cada vez mais comuns os estudos de caso de natureza qualitativa. No entanto, isso não é uma característica essencial deste tipo de investigação. Embora não sejam muito frequentes, podem ser realizados estudos de caso recorrendo a abordagens preferencialmente quantitativas ou de carácter misto. Assim, por exemplo, o estudo de uma escola ou de um sistema educativo pode certamente tirar importantes informações de variáveis de natureza demográfica como o número de alunos, as taxas de retenção, a origem social, etc.

Os resultados de um estudo de caso podem ser dados a conhecer de diversas maneiras, incluindo textos escritos, comunicação oral ou registos em vídeo. O seu relato assume normalmente a forma de uma narrativa cujo objectivo é contar uma história que acrescente algo de significativo ao conhecimento existente e seja tanto quanto possível interessante e iluminativa (Stake, 1988).

Dado que o objectivo do estudo tinha por base analisar as interpretações do conceito de função e das propriedades das funções em diferentes representações (em particular, analisar também os processos utilizados na tradução de uma representação noutra), assim como, a identificação e caracterização dos processos utilizados na resolução de problemas em contextos de Matemática pura e de semi–realidade (com funções quadráticas), por parte dos alunos seleccionados para os estudos de caso, resolvi optar por uma metodologia de natureza qualitativa e na modalidade de estudo de caso, porque me pareceu ser aquela que melhor poderia responder a estas questões. Ao longo do estudo, o meu interesse não se centrou apenas no "o quê" mas também no "porquê" e no "como". Para além da verificação, pretendi também conhecer os processos e as estratégias utilizadas pelos alunos na actividade matemática.

Esta investigação contempla as características enunciadas por Bogdan e Biklen (1994), uma vez que os participantes são alunos, os dados são recolhidos no contexto escolar, os registos documentais (produzidos pelos alunos, ou, observados e transcritos) são, também, analisados pelo investigador e a sua interpretação constitui o instrumento principal de análise.

A opção de realizar estudos de caso prendeu-se com o facto destes serem particularmente adequados quando se pretende observar e descrever detalhada e aprofundadamente um determinado fenómeno, tendo em conta o contexto em que está inserido (Merrian, 1988). Além disso, a escolha de estudos de caso é pertinente quando é muito difícil definir fronteiras entre o fenómeno estudado e o seu contexto. Na investigação em causa, procurou-se observar pormenorizadamente o comportamento de três alunos, relativamente às questões já enunciadas e foi fundamental que isso tivesse sido realizado em contexto escolar, pois o ambiente escolar foi determinante para a maioria dos acontecimentos ocorridos e para a compreensão dos comportamentos observados.

Para além de tudo o que já foi referido, importa ainda salientar que este estudo não foi realizado com preocupação de generalização de resultados. Apenas se pretendeu investigar o trabalho de três alunos, tendo por base as questões inicialmente formuladas, e assim obter resultados específicos relativos a esses participantes.

3.2 – Design da investigação

Esta investigação centra-se, sobretudo, na realização dos seguintes temas do 10.º ano de escolaridade:

- Funções e gráficos: generalidades sobre funções;
- Função afim;
- Função quadrática;
- Transformações e simetrias do gráfico de uma função.

Tem como objectivo principal estudar como os alunos raciocinam e aprendem sobre as funções, nas suas diferentes representações (algébrica, gráfica, numérica e em tabela), com ou sem recurso à calculadora gráfica.

O desenvolvimento desta investigação alicerçou-se na análise das resoluções, efectuadas pelos três alunos objectos de estudos de caso, dos testes de avaliação dos dias 12/Março/2010 e 25/Maio/2010, do teste intermédio do dia 5/Maio/2010 (versão 2), da ficha de trabalho n.º1 – Função quadrática, onde se pretende que os alunos estudem e sistematizem o comportamento da função quadrática quando apresentada na forma $y = a(x-h)^2 + k, \quad com \quad a \neq 0$, e identifiquem o significado dos parâmetros *a*, *h* e k, e, principalmente, na análise de uma entrevista realizada individualmente a cada um dos três alunos objectos de estudos de caso, durante e depois da resolução de uma tarefa de exploração e de investigação, onde se pretende abordar a compreensão do conceito de função em diferentes representações, das propriedades de funções (domínio, contradomínio, intersecção com os eixos coordenados, extremos) conhecidas as suas representações gráficas, e resolver problemas em contexto de "Matemática pura", relacionados com o estudo de funções, resolução de condições e transformação de funções, quer pela aplicação de métodos gráficos, quer pela aplicação de métodos algébricos, e em contexto de semi-realidade (problemas concretos ligados a situações do mundo real, como por exemplo, tarifários, colónias de bactérias, custos, temperatura, áreas, etc.). Posteriormente, também foi analisada a resolução da ficha de trabalho n.º2 – Função quadrática, onde se pretende que os alunos estudem os efeitos dos parâmetros a, α *e* β na equação $y = a(x-\alpha)(x-\beta)$ e analisem as informações imediatas que cada um fornece, bem como, efectuem a tradução gráfica de uma função quadrática para a sua representação algébrica. As resoluções da ficha de trabalho n.º3 – Função quadrática, também foram analisadas (na resolução desta ficha, os alunos tinham como objectivos, resolver condições do 2.º grau com ou sem recurso à calculadora gráfica, identificar algumas propriedades relevantes das funções quadráticas). Também foram recolhidas e analisadas as folhas de resposta dos alunos, relativamente aos questionários 1 e 2.

Todos os materiais referidos anteriormente e que serviram de suporte à investigação encontram-se em anexo.

3.3 – Planificação dos temas

Os temas de ensino abordados na investigação foram leccionados em dezoito blocos, tendo cada bloco a duração de 90 minutos. A primeira aula ocorreu no dia 2 de Fevereiro, de 2010 e a última aula teve lugar no dia 20 de Abril, de 2010. A figura 3.1 apresenta uma planificação da distribuição das aulas, onde aparecem discriminados os conteúdos a leccionar em cada tema, assim como, os objetivos específicos que se pretende que os alunos atinjam na sua aprendizagem.

CONTEÚDOS	OBJECTIVOS ESPECÍFICOS	BLOCOS (aulas de 90 minutos)
Funções e gráficos: generalidades sobre funções		
Conceito de função Gráfico e representação gráfica de uma função	- Identificar correspondências que são funções. - Definir função. - Distinguir gráfico de representação gráfica de uma função. - Ler e interpretar o gráfico ou uma representação gráfica de uma função. - Ler no gráfico o domínio e o contradomínio de uma função.	1
Variável dependente e variável independente Formas de representar uma função	- Aplicar os termos variável dependente e variável independente. - Reconhecer funções representadas por esquemas, tabelas, expressões analíticas ou gráficos. - Representar uma função usando formas diferentes.	1
Zeros de uma função Extremos absolutos e extremos relativos de uma função	- Definir zero de uma função. - Determinar os zeros de uma função usando ou não a calculadora gráfica. - Interpretar os zeros de uma função em contexto real. - Identificar os extremos absolutos e relativos de uma função. - Indicar maximizantes e minimizantes.	1
Monotonia de uma função Funções reais de variável real. Conceito intuitivo de continuidade	- Estudar a monotonia de uma função. - Construir a tabela de variação de uma função. - Definir função real de variável real. - Utilizar, de forma intuitiva, o conceito de função contínua.	1

A calculadora gráfica na resolução de problemas		
Determinação dos pontos de intersecção do gráfico de uma função com os eixos coordenados	- Escrever uma expressão analítica na calculadora. - Definir a "janela". - Obter a representação gráfica de uma função com a calculadora. - Obter uma tabela na calculadora. - Usar a função "intersection". - Determinar os pontos de intersecção do gráfico de uma função com os eixos coordenados. - Resolver problemas, usando a calculadora.	1
Utilização da calculadora gráfica para determinar um máximo de uma função Utilização da calculadora gráfica para determinar um mínimo de uma função	- Usar a tabela para ajudar na definição da "janela". - Usar a calculadora gráfica para determinar o máximo de uma função. - Usar a tabela para ajudar na definição da "janela". - Usar a calculadora gráfica para obter o mínimo de uma função.	1
Resolução de problemas em contexto real usando a calculadora gráfica, envolvendo máximos, mínimos, zeros e intersecção de gráficos de funções	- Resolver problemas em contexto real, usando a calculadora gráfica.	1
Função afim		
Função afim. Função linear e função constante Propriedades da função afim Modelo analítico de uma função afim	- Definir função afim. - Identificar uma função constante e uma função de proporcionalidade directa. - Estudar uma função afim. - Resolver problemas usando uma função afim. - Estabelecer conexões entre geometria e funções.	1

Função definida por ramos Resolução de problemas em contexto real envolvendo a função afim	- Definir analiticamente uma função por ramos. - Resolver problemas usando modelação matemática.	1
Função quadrática		
Função quadrática. Definição e aplicações Concavidade do gráfico de uma função quadrática	- Identificar funções quadráticas. - Usar a calculadora gráfica para representar funções quadráticas. - Resolver problemas usando funções quadráticas. - Identificar o sentido da concavidade do gráfico de uma função quadrática.	1
Intersecção do gráfico de uma função quadrática com os eixos coordenados Equações do 2.º grau	- Determinar os pontos de intersecção do gráfico da função quadrática com os eixos coordenados. - Resolver problemas usando a função quadrática. - Resolver equações do 2.º grau usando a calculadora gráfica.	2
Inequações do 2.º grau	- Resolver inequações do 2.º grau com ou sem calculadora.	1
Contradomínio de uma função quadrática. Eixo de simetria do gráfico de uma função quadrática	- Determinar o contradomínio de uma função quadrática.	1
Resolução de problemas envolvendo a função quadrática	- Resolver problemas envolvendo a função quadrática.	1

Transformações e simetrias do gráfico de uma função		
Translação vertical do gráfico de uma função Translação horizontal do gráfico de uma função Translação horizontal e vertical do gráfico de uma função: generalização	- Representar graficamente a função *h*, partindo do gráfico de *f*, sendo: $h(x) = f(x) + c$, $c \in R \setminus \{0\}$. - Indicar o contradomínio da função *h*, partindo do contradomínio da função *f*, sendo: $h(x) = f(x) + c$, $c \in R \setminus \{0\}$. - Representar graficamente a função *h*, partindo do gráfico da função *f*, sendo: $h(x) = f(x + c)$, $c \in R \setminus \{0\}$. - Indicar o domínio da função *h*, partindo do domínio da função *f*, sendo: $h(x) = f(x + c)$, $c \in R \setminus \{0\}$. - Obter o gráfico da função *g* partindo do gráfico da função *f*, sendo $g(x) = f(x + a) + b$, com $a, b \in R$.	1
Expansão e contracção na vertical do gráfico de uma função Expansão e contracção na horizontal do gráfico de uma função Simetria em relação ao eixo *Ox*	- Sendo $c \in R^{+} \setminus \{1\}$, relacionar o gráfico de $f(x)$ com o gráfico de $cf(x)$ com $c > 1$ ou $0 < c < 1$. - Sendo $c \in R^{+} \setminus \{1\}$, relacionar o gráfico de $f(x)$ com o gráfico de $f(cx)$ com $c > 1$ ou $0 < c < 1$. - Representar graficamente $-f(x)$ partindo do gráfico de $f(x)$. - Mostrar analiticamente e verificar graficamente se o gráfico de uma função é simétrico relativamente ao eixo *Ox*.	1

Simetria do gráfico de uma função relativamente ao eixo *Oy*. Função par Simetria em relação à origem do referencial. Função ímpar	- Definir função par. - Reconhecer analítica e graficamente se uma função é ou não uma função par. - Definir função ímpar. - Reconhecer analítica e graficamente uma função ímpar. - Estudar a paridade de uma função.	1

Figura 3.1 – Planificação dos temas de ensino

3.4 – Fases do estudo

Este estudo realizou-se entre Outubro de 2009 e Julho de 2010 e passa por três fases. Na primeira fase, é realizada uma revisão de literatura dos temas, que irão ser abordados durante a investigação, tendo em vista o aprofundamento teórico e empírico das matérias a investigar, e da metodologia de investigação a adoptar. Neste período, foram elaboradas a tarefa da entrevista, as fichas de trabalho e os questionários. A segunda fase, relativa à recolha de dados (recolha das resoluções dos testes de avaliação, das fichas de trabalho, da tarefa da entrevista, dos questionários preenchidos e primeira análise dos dados), decorre no período compreendido entre os meses de Fevereiro e Maio de 2010. A terceira e última fase, de Maio a Julho de 2010, é destinada à análise pormenorizada dos dados e à realização de leituras complementares às que foram feitas anteriormente, de modo a escrever os resultados e as conclusões da investigação, de uma forma fundamentada, sob o ponto de vista científico e empírico.

3.5 – Participantes

Este estudo realizou-se durante o ano lectivo de 2009/10, numa escola secundária com 2.º e 3.º ciclos situada na cidade de Almada, na margem sul do Tejo, e recaiu sobre três alunos de uma turma do 10.º ano de escolaridade, do curso de Ciências Socioeconómicas, constituída por 28 alunos, dos quais, 17 eram rapazes e 11 eram raparigas.

Nesta investigação, os três alunos que são objecto de estudos de caso, foram seleccionados pelo investigador, depois de um cuidadoso processo de observação referente ao 1.º período lectivo, e que contou com a preciosa ajuda da professora da turma na sua identificação. Para este processo de selecção, tive em consideração as seguintes condições:

- **(i)** Comportamento disciplinar
- **(ii)** Participação na aula
- **(iii)** Resolução dos trabalhos propostos para casa
- **(iv)** Aproveitamento no final do 1.º período lectivo

Estes alunos são a Ana, o Daniel e o Filipe. Na sala de aula, as atitudes da Ana e do Daniel são ligeiramente distintas das atitudes do Filipe. Ana e Daniel são alunos que participam na aula, apenas quando são questionados. São alunos com um comportamento disciplinar correcto, atentos, interessados e trabalhadores, resolvendo as tarefas da aula e os trabalhos de casa propostos. No final do 1.º período, Ana obteve 14 valores e Daniel obteve 16 valores. Tudo o que foi dito anteriormente também se aplica ao Filipe, com a diferença de que este aluno participa espontaneamente, de uma forma activa e construtiva, na aula. No final do 1.º período, Filipe obteve 14 valores.

3.6 – Técnicas de recolha de dados

Neste estudo a recolha de dados foi feita através de: registos escritos feitos pelo investigador a partir da observação e leccionação de aulas; registos escritos das entrevistas semi-estruturadas a cada um dos alunos que constituíram estudos de caso, realizadas durante e após a resolução da tarefa da entrevista, com o objectivo de compreender melhor o seu desempenho; Resoluções da tarefa da entrevista, dos testes de avaliação e das fichas de trabalho; e dois questionários preenchidos por cada um dos alunos, objecto dos estudos de caso.

3.6.1 – Entrevistas

A entrevista é uma fonte de informação acerca de aspectos não observáveis, que permite obter um conhecimento mais profundo de uma dada situação. As entrevistas qualitativas podem variar quanto aos graus de estruturação, considerando-se como situações extremas as entrevistas estruturada e a não estruturada. O problema em estudo e o objectivo da entrevista definem o tipo de entrevista. Pode-se utilizar uma entrevista mais livre e exploratória no início do projecto e pode ser necessário recorrer a uma entrevista mais estruturada quando se pretende obter dados sobre aspectos mais particulares (Bodgan e Biklen, 1994). O maior ou menor sucesso das entrevistas depende da sua preparação, da qualidade do entrevistador e do carácter do entrevistado.
A entrevista constituiu uma fonte de dados que permite compreender melhor os processos e raciocínios efectuados pelos alunos. Este instrumento é utilizado "para recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito, permitindo ao investigador desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam aspectos do mundo" (Bogdan e Biklen, 1994, p. 134).

Nas entrevistas individuais (a entrevista foi realizada depois de se ter leccionado o tema "Função quadrática", tendo uma duração de 90 minutos, e cujo objectivo é recolher dados que possam contribuir para responder às questões de investigação) é aplicada uma tarefa (intitulada "Tarefa da entrevista", que se encontra em anexo). Esta tarefa possui cinco questões. A questão 1 é constituída por um conjunto de cinco representações (duas gráficas, duas algébricas e uma tabela) e pede-se ao aluno que reconheça e justifique as que são funções. Procura-se saber se o aluno identifica uma função qualquer que seja a sua representação (tabela, gráfico ou expressão algébrica). Na questão 2, é considerada uma representação algébrica de uma função definida por ramos. É solicitado ao aluno que traduza esta representação numa representação gráfica com o recurso à calculadora gráfica e que identifique as propriedades relevantes da função. O aluno deve escolher, na calculadora gráfica, um janela de visualização que se adeqúe à representação gráfica da função. Na questão 3 surge a representação gráfica de uma função quadrática e, com base nesta representação e nas propriedades das transformações de funções, o aluno deve identificar o gráfico e algumas propriedades de uma nova função para determinar o conjunto solução de uma inequação. É, ainda, solicitado a tradução da representação gráfica para a representação algébrica de uma função. A questão 4 corresponde a um problema em contexto de semi-realidade – festival rock. Os alunos podem começar por fazer a representação gráfica da função, através da calculadora gráfica, e devem procurar uma janela de visualização que se adeqúe a esta representação. A utilização correcta da calculadora gráfica permite encontrar resultados cujo significado deve ser interpretado pelos alunos. Mas estes também podem usar outras representações (numérica ou algébrica) para chegarem aos mesmos resultados. Este problema permite identificar os processos de resolução dos alunos. A questão 5 compreende um problema que relaciona variáveis do domínio da Geometria e corresponde à tradução da função da área do quadrilátero numa representação algébrica. Ainda nesta questão, é solicitada a resolução de uma inequação do segundo grau, com recurso ou não à calculadora gráfica.

3.6.2 – Análise documental

Foram vários os documentos que serviram de suporte a este estudo. A ficha com a caracterização da turma foi analisada, bem como, a avaliação final de cada período lectivo e os questionários preenchidos, depois da realização da tarefa da entrevista, sempre com o intuito de obter informação que permitisse caracterizar o objecto de estudo. Para além das resoluções da tarefa da entrevista, foram, também, recolhidas e analisadas as resoluções dos testes de avaliação e das fichas de trabalho, referentes a toda a unidade curricular "Funções".

3.7 – Análise de dados

A análise de dados é realizada em três fases (Merrian, 1988):

(i) redução de dados;
(ii) apresentação de dados;
(iii) interpretação e verificação de dados.

Segundo Merrian (1988), na investigação qualitativa a análise dos dados começa com frequência no primeiro momento de recolha de dados. Pela natureza do estudo, a análise de dados assumiu um carácter essencialmente descritivo e interpretativo, procurando relações entre os dados específicos constituídos pelos diferentes materiais obtidos, numa perspectiva indutiva, sem a finalidade de provar hipóteses previamente formuladas.

Considerando o objectivo deste estudo, tendo em conta alguns aspectos da revisão de literatura e os dados recolhidos, optei pelas seguintes categorias de análise:

1. Reconhecimento do conceito de função
2. Representação gráfica de uma função visualizada no ecrã da calculadora
3. Tradução de uma representação gráfica numa representação algébrica
4. Tradução de uma representação numérica numa representação algébrica
5. Opção por processos algébricos na resolução de problemas
6. Opção por processos gráficos na resolução de condições

Capítulo 4

O caso da Ana

Ana tem 15 anos, é de nacionalidade portuguesa e vive com os pais em Almada. Tem um irmão mais velho. Ambos os pais têm como habilitações literárias, cursos superiores. Ana concluiu o 9.º ano de escolaridade com nível cinco a duas disciplinas, nível quatro a oito disciplinas e nível três a uma disciplina. Neste ano lectivo, revela um bom desempenho em todas as disciplinas e, em particular, na Matemática, onde obteve no 1.º e 2.º períodos, a classificação de 14 valores, tendo como classificação final, obtida no 3.º período, 13 valores, sendo esta, de todas as classificações obtidas nas outras disciplinas, a sua classificação mais baixa. No questionário, Ana refere que a sua disciplina favorita é a Geografia. Transitou sempre de ano e ainda não decidiu qual a profissão que gostaria de ter. No entanto, quer prosseguir os estudos para o ensino superior, porque considera que, com um curso superior, vai conseguir aprofundar e aprender conhecimentos que lhe vão ser muito úteis para o seu futuro emprego.

Em relação à disciplina de Matemática, Ana considera-se uma boa aluna nesta disciplina, apesar de dizer que esta disciplina é um pouco complicada. Não se recorda de nenhuma experiência especialmente interessante, vivida em anos escolares anteriores, na disciplina de Matemática. O tema de Matemática que a Ana mais gosta é a Estatística, porque aprecia mais a parte dos gráficos e das tabelas e o tema que menos gosta é a Geometria porque tem muita teoria. Neste ano lectivo, Ana refere que sentiu mais dificuldades na parte da Geometria, mas que, em anos anteriores, não sentiu nenhuma dificuldade em especial.

Ana gosta de trabalhar com a calculadora gráfica, porque lhe permite ver as transformações e os tipos de gráficos das funções, apenas sendo necessário para o efeito a mera introdução das suas expressões analíticas. Para ela, a calculadora ajuda a compreender a Matemática, porque, por exemplo, lhe possibilita, através da visualização dos gráficos das funções, descobrir máximos, mínimos, zeros, etc. Ana entende que aprender Matemática não serve apenas para aprendermos a efectuar operações, pois, também serve para aplicarmos esses conhecimentos na vida real.

Na sala de aula, quando é solicitada a participação da Ana, ela expõe com facilidade as suas opiniões. É uma aluna introvertida e não assume protagonismo no seio da turma, mas quando é questionada, intervém. É uma aluna empenhada, atenta, interessada e trabalhadora, resolvendo sempre todos os trabalhos de casa propostos.

4.1 – Reconhecimento do conceito de função

Na questão 1 da tarefa da entrevista (nesta questão, é pedido ao aluno para identificar quais das seguintes representações – Tabela, gráficos e expressões algébricas, correspondem a funções), Ana define correctamente o conceito de função, mas não reconhece em todas as situações apresentadas as representações que são funções. Na questão 1.1, a aluna refere que a representação na tabela não é uma função, pois, constata que, ao objecto –6 correspondem duas imagens, –15 e 15. Na questão 1.2, a aluna refere que a representação gráfica corresponde a uma função, justificando com a definição de função, "a cada objecto corresponde uma, e uma só, imagem". Na questão 1.3, a aluna tem dificuldades em reconhecer que a representação gráfica daquela expressão não corresponde a uma função, como facilmente se percebe, através do seguinte diálogo:

Professor: É uma função?
Ana: É!
Professor: Observa melhor o gráfico…
Ana: Não é!
Professor: Porquê?
Ana: …
Professor: E se traçasses uma recta … de que tipo?
Ana: Vertical?!
Professor: Intersectava o gráfico…
Ana: Em dois pontos!
Professor: Então, é uma função?
Ana: Não, porque há objectos com duas imagens.

Na questão 1.4, a aluna reconhece que a equação $3x + y = 5$ é uma função, mais especificamente, uma função afim, que é representada graficamente por uma recta. Na questão 1.5, Ana não reconhece que a equação $x^2 + y^2 = 9$ é a equação cartesiana de uma circunferência no plano. Analisemos o seguinte diálogo ocorrido durante a entrevista:

Professor: É uma função?
Ana: Não sei … o gráfico vai dar uma parábola!
Professor: Porquê?
Ana: Porque tem o x^2.
Professor: Essa equação representa um lugar geométrico bem conhecido.
Ana: Não sei!
Professor: É a equação cartesiana de uma circunferência.
Ana: Ah, pois é!
Professor: Uma função pode ser representada graficamente por uma circunferência?
Ana: Não!
Professor: Porquê?
Ana: Porque existem objectos que têm a mesma imagem.
Professor: Dá-me um exemplo concreto!
Ana: …
Professor: Qual é o centro da circunferência?
Ana: É o ponto (0, 0).
Professor: E o raio?
Ana: É a raiz de 9, é 3.
Professor: Já tens todos os dados necessários para representares geometricamente a circunferência. Agora, dá-me um exemplo que mostre que esta expressão algébrica não corresponde a uma função.
Ana: Por exemplo, o zero tem a imagem 3 e –3. Logo, não é função.

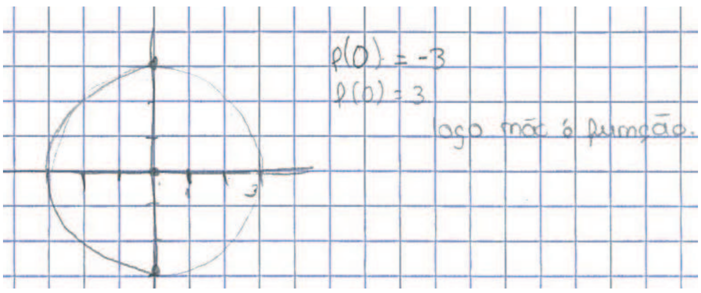


Figura 4.1 – Resolução da questão 1.5 (tarefa da entrevista; 17/Maio/2010)

Ana não reconhece que a equação $x^2 + y^2 = 9$ é a equação cartesiana de uma circunferência no plano. Por isso, esta equação do 2.º grau induz a aluna a considerar que é a equação de uma função quadrática, cuja representação gráfica é uma parábola. Mesmo depois de se aperceber que a equação corresponde à equação cartesiana de uma circunferência no plano, Ana, apesar de responder claramente que essa representação algébrica não é uma função, uma vez que há objectos com duas imagens, tem dificuldades em dar um exemplo, porque não pensa em representar graficamente a circunferência. Só depois de eu lhe perguntar qual é o raio e o centro da circunferência, sugerindo-lhe para a representar na folha de respostas, Ana é capaz de me dar um exemplo.

O seu desempenho nesta questão é satisfatório, embora revele dificuldades em identificar funções na sua representação gráfica, assim como, na identificação de funções representadas algebricamente (por não reconhecer a equação cartesiana de uma circunferência). Desta forma, Ana escreve correctamente a definição de função. No entanto, por vezes, não distingue as representações algébricas, ou gráficas que são funções.

4.2 – Representação gráfica de uma função visualizada no ecrã da calculadora

Na questão 2 da tarefa da entrevista (nesta questão, é pedido ao aluno que transcreva para a folha de respostas a representação gráfica de uma função definida por ramos, visualizada no ecrã da calculadora gráfica, que identifique algumas das suas propriedades e escreva os parâmetros da janela de visualização do gráfico) Ana apresenta uma representação gráfica da função g definida por ramos, sendo um dos ramos a restrição de uma função afim e o outro a restrição de uma função quadrática. Considera algumas propriedades importantes, tais como, o domínio, o contradomínio e os zeros da função, mas não representa no gráfico a “bola” aberta para $x < 0$ e a “bola” fechada para $x \geq 0$.

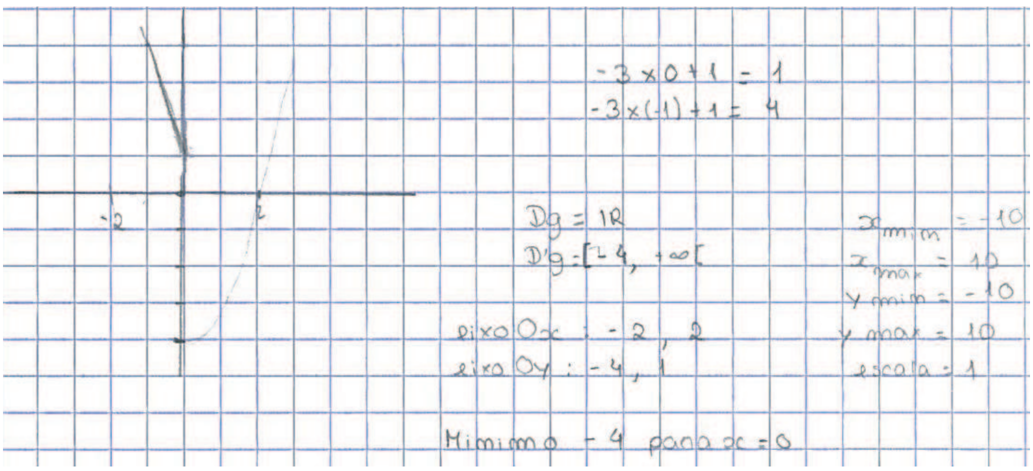


Figura 4.2 – Resolução da questão 2 (tarefa da entrevista)

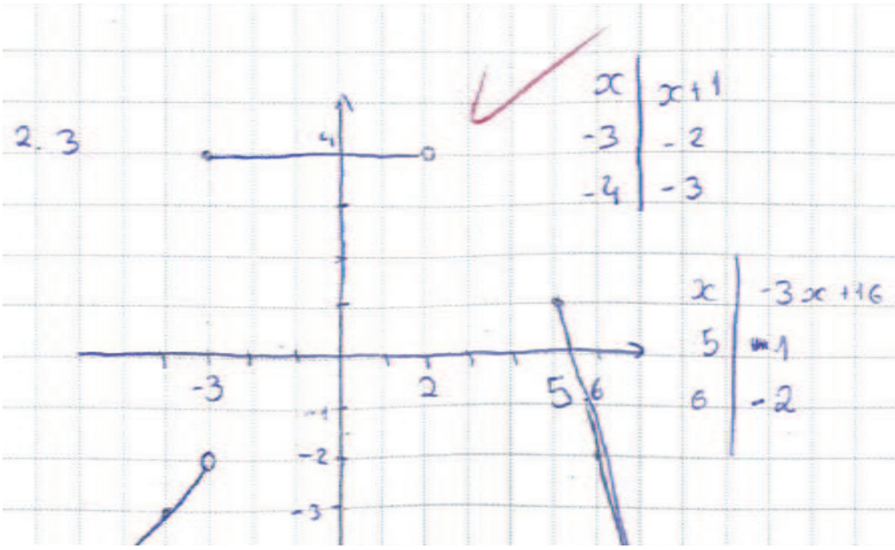


Figura 4.3 – Resolução da questão 2.3 (teste de 12/Março/2010)

Quando questionada por não ter desenhado as “bolas” abertas, ou fechadas na representação gráfica da função *g*, a aluna responde o seguinte:

> Professor: Que tipo de função é esta?
> Ana: É uma função definida por ramos.
> Professor: Consegues representar graficamente esta função na calculadora gráfica?
> Ana: Sim, consigo!
> Professor: Descreve-me o processo.
> Ana: Primeiro, introduzo $-3x+1$ e depois, x^2-4, e mando fazer os gráficos.
> Professor: Agora, podes passar o gráfico para a folha de respostas.
> Ana: Tenho dificuldades…
> Professor: Qual é a tua dúvida?
> Ana: Dar pontos.
> Professor: O que são os eixos coordenados?
> Ana: São os eixos *Ox* e *Oy*.
> Professor: onde estão os zeros?
> Ana: No eixo Ox.
> Professor: Como é que encontramos a ordenada na origem?
> Ana: Substituímos na expressão *x* por zero.
> …
> Professor: Achas que a representação gráfica da função está bem?
> Ana: Não! A bola é aberta no ramo, para $x<0$, e fechada no ramo, para $x \geq 0$.

A entrevista permite perceber que Ana conhece as propriedades de uma função definida por ramos, sendo um dos ramos a restrição de uma função afim e o outro ramo a restrição de uma função quadrática. Deste modo, verifica-se que a aluna transcreve a representação gráfica, do ecrã da calculadora para a folha de respostas, mas não tem em conta algumas propriedades da função, como é o caso dos pontos com "bola" aberta e "bola" fechada, que não são evidenciados pela calculadora gráfica. No entanto, Ana revela que conhece e é capaz de identificar as propriedades de uma função, através da sua representação gráfica visualizada no ecrã da calculadora.

4.3 – Tradução de uma representação gráfica numa representação algébrica

Na questão 3.2 (nesta questão, é pedido ao aluno que escreva uma expressão algébrica que represente a função quadrática *f*, cuja representação gráfica é dada no enunciado), Ana mostra algumas dificuldades em utilizar representações gráficas de funções na resolução de exercícios, como se verifica no seguinte diálogo recolhido aquando da entrevista:

> Ana: Professor, uma função quadrática é representada algebricamente da seguinte forma: $ax^2 + bx + c$
> Professor: Sim.
> Ana: Basta o a e o b serem diferentes de zero
> Professor: Só o a!
> Ana: Não estou a conseguir resolver!
> Professor: Lembras-te de outra forma de representar algebricamente uma função Quadrática?
> Ana: Sim!
> Professor: Qual?
> Ana: $a(x^2 - h) + k$.
> Professor: De certeza?
> Ana: O quadrado está fora dos parênteses, desta maneira:
> $a(x - h)^2 + k$.
> Professor: Sim, está certo!
> Ana: O a tem um valor?
> Professor: Sim!
> Ana: Tenho que resolver esta expressão em relação a a?
> Professor: Sim.
> …
> Professor: *(h, k)* são coordenadas de que ponto?
> Ana: Do vértice.
> Professor: Quais são as coordenadas do vértice?
> Ana: (1, 1).
> Professor: Mentira!
> Ana: (1, 0).
> …
> Professor: O que é que estás a definir?

Ana: Uma função.
Professor: Então, tens que o indicar, através de uma igualdade, $f(x) = a(x-h)^2 + k,\ a \neq 0$.
Ana: Como é que calculo o *a*?
Professor: Tens que fazer substituições na expressão de *f*.
Ana: Tenho que substituir *x* e *f(x)*?
Professor: Sim.
Ana: Como?
Professor: Se observares o gráfico de *f*, há pontos que são conhecidos.
Ana: Ah, pois é! O vértice e o ponto do eixo *Oy*.

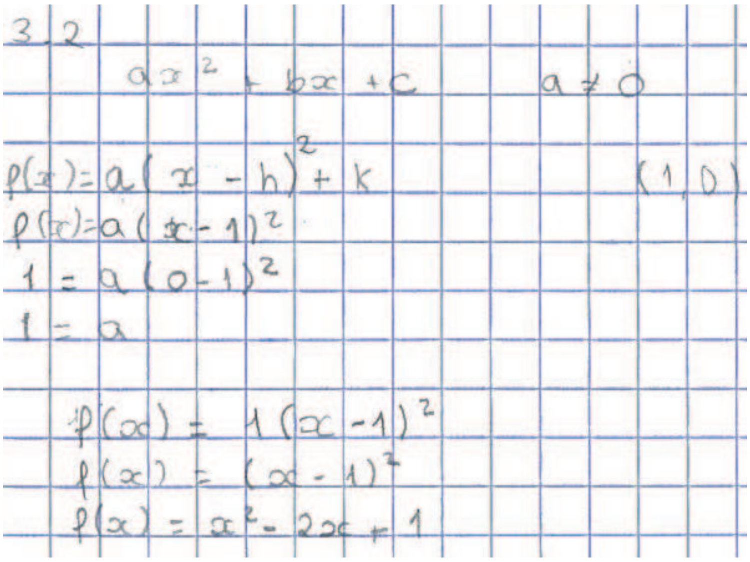


Figura 4.4 – Resolução da questão 3.2 (tarefa da entrevista)

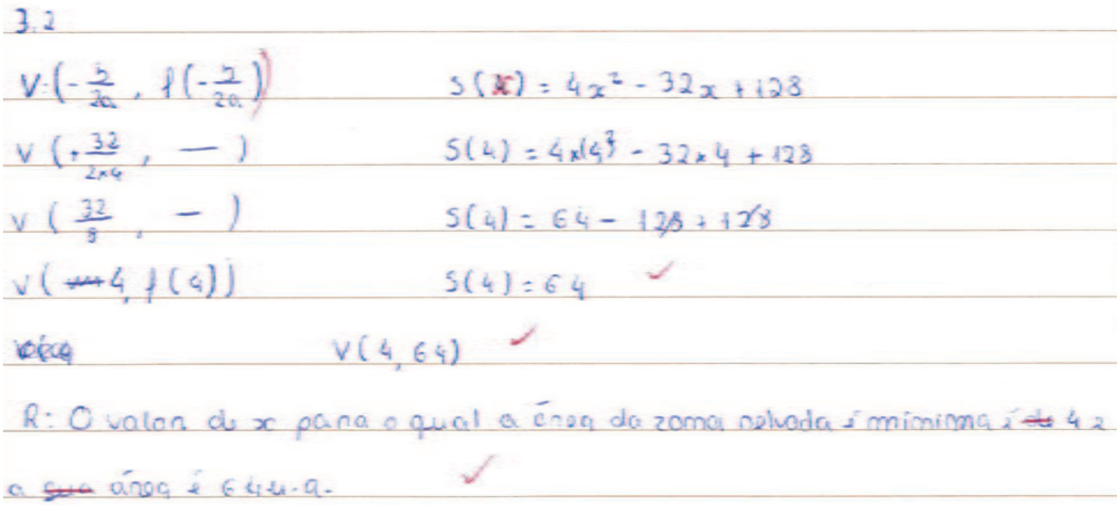


Figura 4.5 – Resolução da questão 3.2 (versão 2 do teste intermédio de 5/Maio/2010)

Ana começa por referir que uma função quadrática *f* é representada algebricamente da seguinte forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

apresentando dúvidas em relação aos parâmetros *a* e *b* terem que ser diferentes de zero, para *f* ser uma função quadrática, às quais, respondi-lhe que só o parâmetro *a* tem que ser diferente de zero, porque é o coeficiente do termo do 2.º grau. Inicialmente, a aluna não se recorda de outra forma de representar algebricamente uma função quadrática, e, quando o faz, escreve a expressão analítica da função, de uma maneira errada, $f(x) = a(x^2 - h) + k$. Todavia, emenda rapidamente a expressão para a sua forma correcta, $f(x) = a(x-h)^2 + k$. Não se recorda como calcular o valor do parâmetro *a* e tem dificuldades em identificar as coordenadas do vértice da parábola. No entanto, depois de eu lhe perguntar quais são as coordenadas do vértice, a aluna consegue dar-me a resposta correcta, (1, 0), e faz corresponder a abcissa do vértice ao valor do parâmetro *h*, e a ordenada do vértice ao valor do parâmetro *k*. Depois, Ana pergunta-me como calcular o valor de *a* e eu sugiro-lhe que identifique as coordenadas de outro ponto na representação gráfica da função *f* (a aluna identifica o ponto de coordenadas (0, 1)), e substitua *x* e *f(x)* na expressão analítica de *f*. Assim, Ana obtém o valor de *a* (*a=1*), e escreve a seguinte expressão analítica de *f* :

$$f(x) = x^2 - 2x + 1.$$

Tanto nesta questão, como na questão 3.1, Ana revela dificuldades em utilizar a informação disponível, através da representação gráfica da função *f*.

4.4 – Tradução de uma representação numérica numa representação algébrica

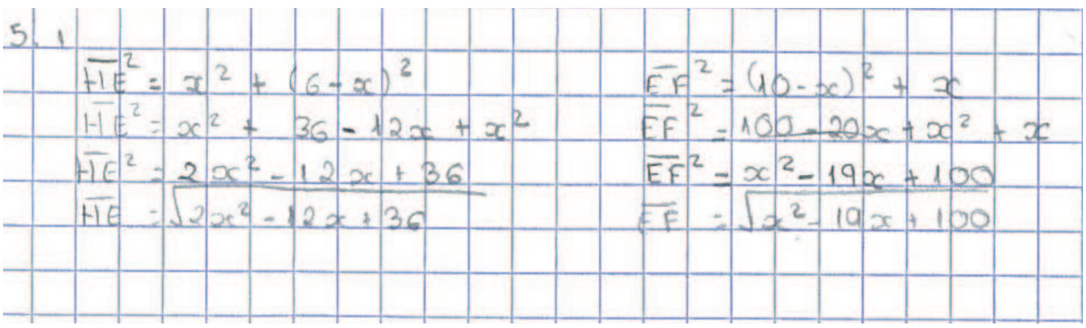


Figura 4.6.1 – Resolução da questão 5.1 (tarefa da entrevista)

Na questão 5.1 (nesta questão, é pedido ao aluno para mostrar que a área *A* do quadrilátero [EFGH], inscrito no rectângulo [ABCD], é dada em função de *x* pela expressão: $A(x) = 2x^2 - 16x + 60$), Ana aplica o teorema de Pitágoras e determina correctamente a medida do comprimento da hipotenusa (figura 4.6.1), de cada um dos triângulos rectângulos da figura (paralelogramo inscrito num rectângulo), $\overline{HE}$ e $\overline{EF}$, mas mostra dificuldades no cálculo da área do quadrilátero [EFGH], inscrito no rectângulo [ABCD], como se verifica no seguinte diálogo extraído da entrevista:

> Ana: Vou fazer o teorema de Pitágoras.
> …
> Ana: Já tenho a expressão do lado $\overline{HE}$ e do lado $\overline{EF}$ do rectângulo. Parece complicado!
> Professor: O quadrilátero [EFGH] é um rectângulo?
> Ana: Sim, é!
> Professor: Não, não é! É um paralelogramo. Repara que, nem todos os ângulos são rectos.
> Ana: Como é que calculo a área de um paralelogramo?
> Professor: Multiplicas a base pela altura. É melhor pensares noutro processo.
> Ana: Já sei! Calculo a área do rectângulo, depois, calculo a área do triângulo [AEH] e multiplico por dois, e calculo a área do triângulo [EFB] e multiplico por dois. Subtraio, à área do rectângulo, as áreas dos quatro triângulos e obtenho a expressão *A(x)*.
> …
> Ana: Professor, isto não está a dar bem!
> Professor: Qual é a área maior?
> Ana: É a do rectângulo. Ah, já sei! Tenho os sinais trocados.

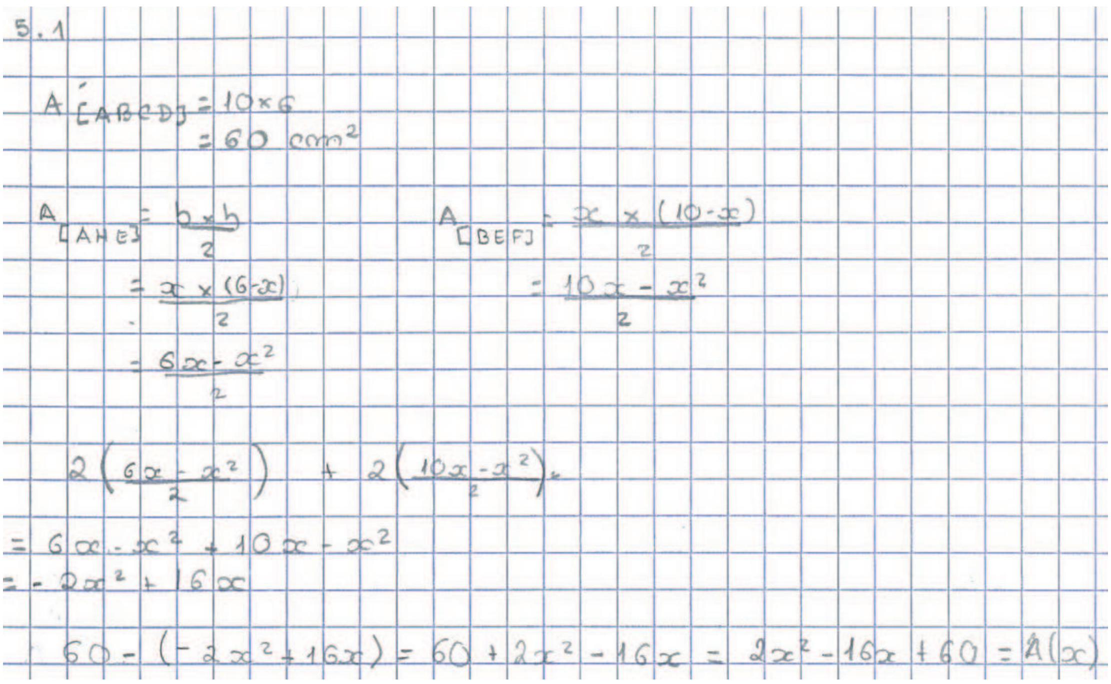


Figura 4.6.2 – Continuação da resolução da questão 5.1 (tarefa da entrevista)

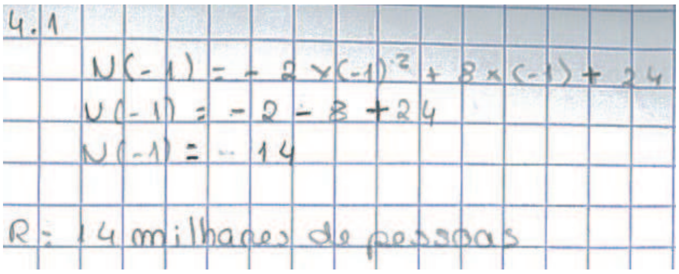
Como se pode observar no diálogo, a aluna percebeu que o processo inicial de resolução não a conduzia à expressão da área do quadrilátero [EFGH]. Depois, constata-se que Ana compreendeu que a área do quadrilátero [EFGH] é igual à diferença da área do rectângulo [ABCD] com a soma das áreas dos quatro triângulos rectângulos (figura 4.6.2). Assim, podemos concluir que Ana faz uma interpretação correcta do problema, convertendo-o numa representação algébrica.

Na figura anterior, podemos observar que faltou algum rigor à aluna na indicação do cálculo da soma das áreas dos triângulos rectângulos.

4.5 – Opção por processos algébricos na resolução de problemas

Antes de iniciar a resolução da questão 4.1 (nesta questão, é pedido ao aluno para determinar o número de pessoas que se encontra no recinto, às 17 horas; o enunciado do problema diz-nos que o número de pessoas no recinto de um festival rock em Lisboa, entre as 16h e as 24h, varia em função de t e pode ser dado aproximadamente por $N(t) = -2\,t^2 + 8\,t + 24$, sendo N o número de pessoas em **milhares** e t dado em **horas**, correspondendo $t = 0$ às 18 h), Ana revela dificuldades em compreender que a variável tempo t toma valores reais, aos quais correspondem horas. Em parte, isso deveu-se ao facto da aluna ter feito uma interpretação incorrecta e desatenta do enunciado, numa primeira fase. Este facto é visível no seguinte diálogo extraído da entrevista:

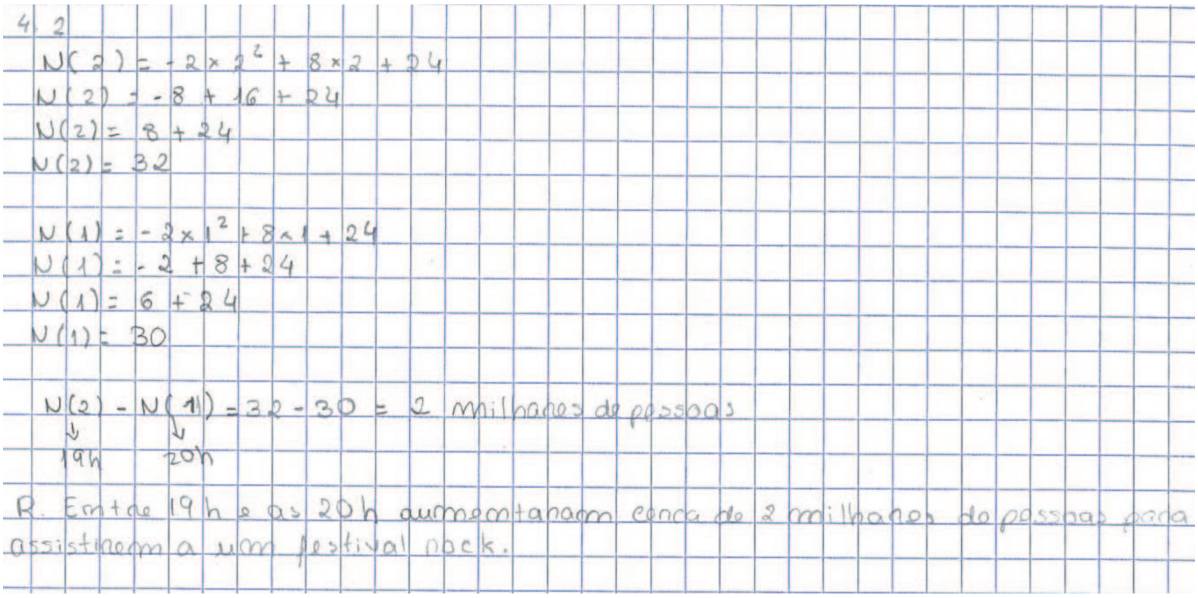
> Professor: Qual é o t, às 17 horas?
> Ana: O t pode ser negativo?
> Professor: Pode!
> Ana: Mas as horas não são negativas?!
> Professor: Pois não! O t toma valores reais que correspondem a horas. Por exemplo, $t = 0$ corresponde às 18 horas. Lê o enunciado!
> Ana: Então, às 17 horas, o t é igual a –1 ($t = -1$), porque o t pode ser negativo.



4.1
$N(-1) = -2 \times (-1)^2 + 8 \times (-1) + 24$
$N(-1) = -2 - 8 + 24$
$N(-1) = 14$
R: 14 milhares de pessoas

Figura 4.7 – Resolução da questão 4.1 (tarefa da entrevista)

No entanto, depois do que foi referido anteriormente, Ana opta por uma resolução algébrica da questão. Interpreta correctamente o valor a atribuir à variável tempo *t*, ao considerar que, às 17 horas, esse valor é igual a –1. Calcula correctamente o valor de *N(–1)* e não se esquece de apresentar a resposta em milhares (figura 4.7).

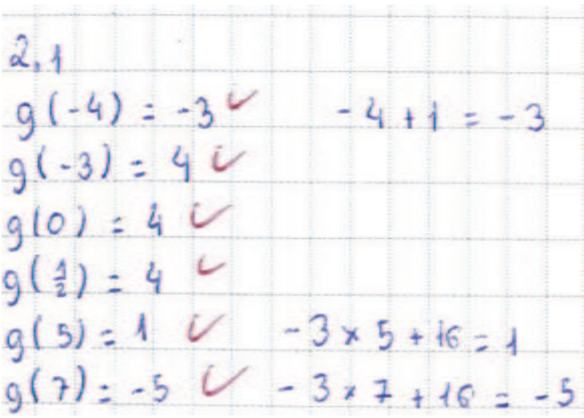


4.2
$N(2) = -2 \times 2^2 + 8 \times 2 + 24$
$N(2) = -8 + 16 + 24$
$N(2) = 8 + 24$
$N(2) = 32$

$N(1) = -2 \times 1^2 + 8 \times 1 + 24$
$N(1) = -2 + 8 + 24$
$N(1) = 6 + 24$
$N(1) = 30$

$N(2) - N(1) = 32 - 30 = 2$ milhares de pessoas
19h 20h
R. Entre as 19h e as 20h aumentaram cerca de 2 milhares de pessoas para assistirem a um festival rock.

Figura 4.8 – Resolução da questão 4.2 (tarefa da entrevista)



2.1
$g(-4) = -3$ $-4 + 1 = -3$
$g(-3) = 4$
$g(0) = 4$
$g(\frac{1}{2}) = 4$
$g(5) = 1$ $-3 \times 5 + 16 = 1$
$g(7) = -5$ $-3 \times 7 + 16 = -5$

Figura 4.9 – Resolução da questão 2.1 (teste de 12/Março/2010)

Na questão 4.2 (nesta questão, é pedido ao aluno que calcule *N(2) – N(1)* e interprete o resultado no contexto do problema), Ana também calcula por processos algébricos os valores de *N(1)* e *N(2)*, efectua a diferença entre estes dois valores e interpreta correctamente o resultado obtido no contexto do problema (figura 4.8).

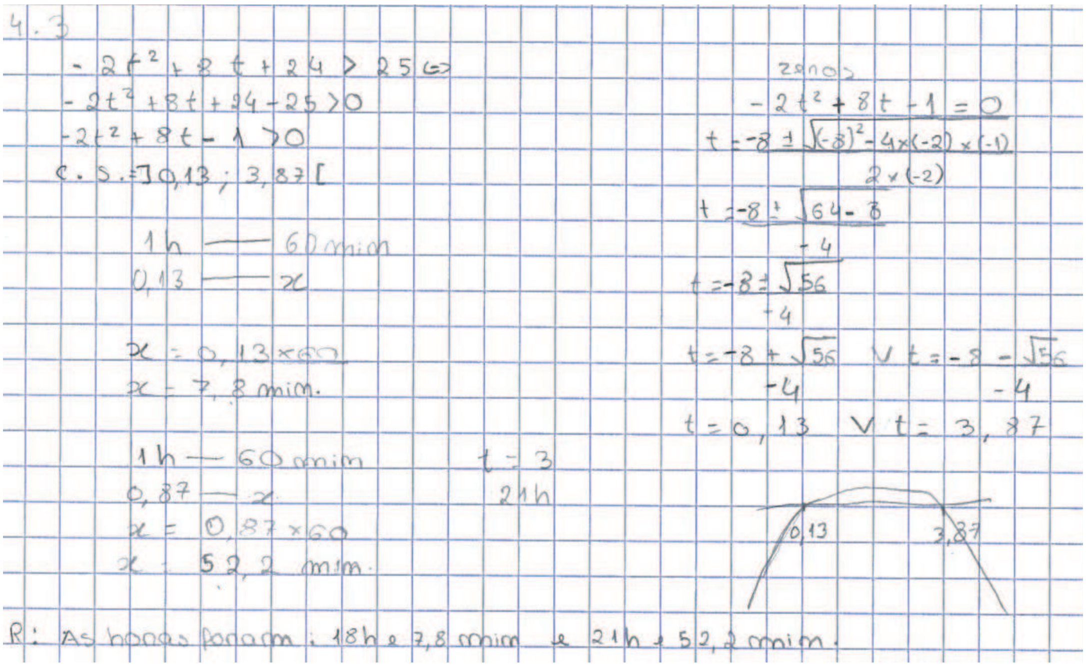


Figura 4.10 – Resolução da questão 4.3 (tarefa da entrevista)

Na questão 4.3 (nesta questão, é pedido ao aluno que determine entre que horas o número de pessoas ultrapassou as 25000 pessoas, dando o resultado aproximado ao minuto), Ana usa a resolução algébrica, apresentando todos os processos, incluindo a identificação da variação do sinal da função quadrática (figura 4.10).

No entanto, Ana apresentou algumas dificuldades em dar o resultado aproximado ao minuto, como se pode observar no seguinte diálogo extraído da entrevista:

> Professor: Qual é a resposta?
> Ana: Entre as 0,13 horas e as 3,87 horas, o número de pessoas ultrapassou as 25000.
> Professor: Não está certo! $t = 0$ corresponde a que horas?
> Ana: Às 18 horas.
> Professor: E, $t = 3$?

Ana: às 21 horas.
Professor: Lê o enunciado: “Dá o resultado aproximado ao minuto”.
Ana: Então, tenho que passar 0,13 e 3,87 a minutos. Vou usar a regra de três simples.
Professor: Não tens que passar o número todo a minutos. Só tens que passar a parte não inteira dos números, porque 0,13 e 0,87 são centésimas da hora.
Ana: Então, só passo a minutos 0,13 e 0,87.

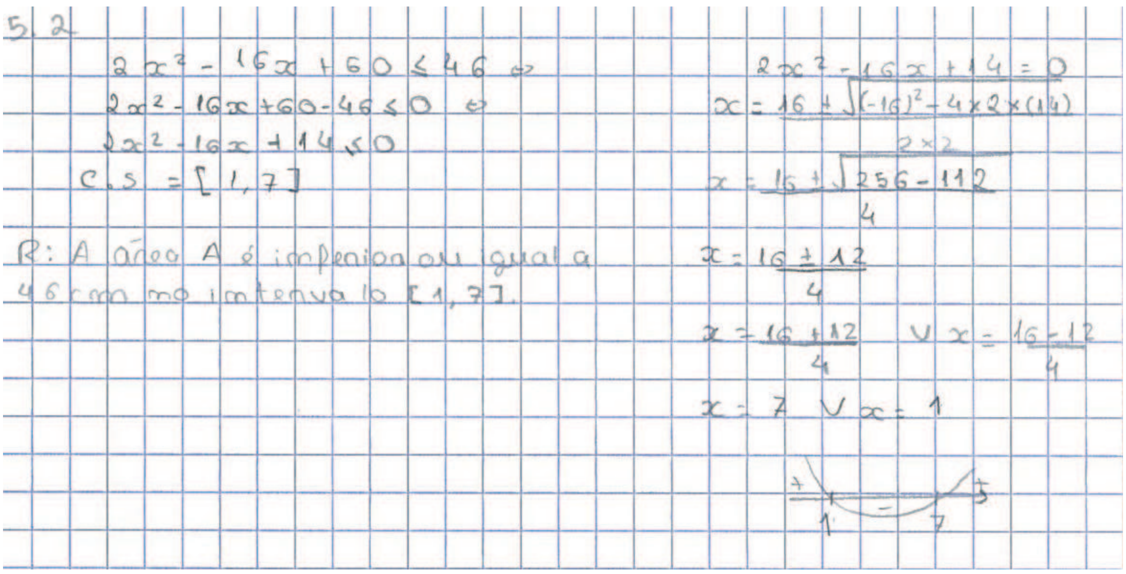


Figura 4.11 – Resolução da questão 5.2 (tarefa da entrevista)

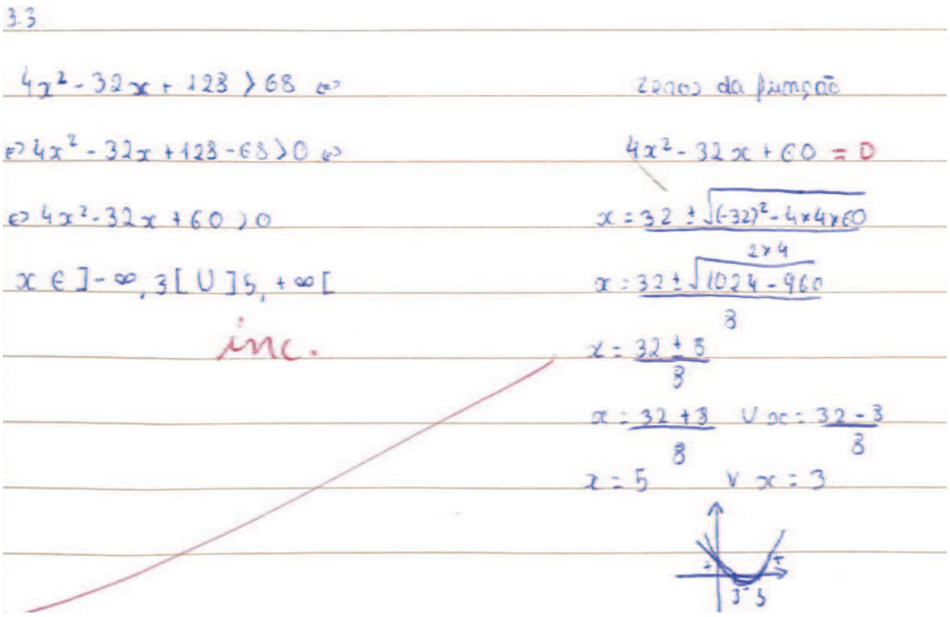


Figura 4.12 – Resolução da questão 3.3 (versão 2 do teste intermédio de 5/Maio/2010)

Na questão 5.2 (nesta questão, é pedido ao aluno que determine, para que valores de *x*, a área *A* é inferior ou igual a 46 cm^2; através da questão 5.1, a expressão analítica da área *A* do quadrilátero [EFGH], dada em função de *x*, é conhecida, sendo $A(x) = 2x^2 - 16x + 60$), Ana determina correctamente as raízes da equação $2x^2 - 16x + 14 = 0$, situa o gráfico em relação ao eixo *Ox* e identifica correctamente a variação do sinal da função (figura 4.11).

A aluna mostra ter preferência pela resolução algébrica, recorrendo pouco à calculadora, mesmo quando não consegue resolver uma questão algebricamente, ou até, na confirmação de resultados. Ana revela um bom desempenho ao nível do cálculo de expressões e de resolução de inequações do 2.º grau.

4.6 – Opção por processos gráficos na resolução de condições

Na questão 3.1 (nesta questão, é pedido ao aluno que determine o conjunto solução da inequação $g(x) \geq 0$, sabendo que $g(x) = -f(x) + 1$; a representação gráfica da função quadrática *f* é dada no enunciado), Ana sentiu algumas dificuldades na sua resolução. O seguinte diálogo resultante da entrevista prova esse facto:

> Ana: Não estou a conseguir resolver.
> Professor: Como é que podes resolver este exercício sem ser de uma forma algébrica?
> Ana: …
> Professor: Já tens o gráfico da função *f*. Podes resolver o exercício de outra forma?
> Ana: De uma forma gráfica?!
> Professor: E começarias de que maneira?
> Ana: Começaria por transformar a função *f* na função *g*.
> Professor: E?
> Ana: …
> Professor: como é que se chama à transformação do gráfico de *f* no gráfico de –*f* ?
> Ana: É uma simetria axial do gráfico de *f*.
> Professor: em relação a que eixo?
> Ana: Ao eixo *Ox*.
> Professor: Podes resolver o exercício graficamente, e por passos.
> Ana: …
> Professor: Sabes as coordenadas de alguns pontos do gráfico de *f*?
> Ana: Sim sei!

Professor: Quais são as coordenadas do vértice do gráfico de *–f*?
Ana: São as mesmas do gráfico de *f*, (1, 0).
Professor: Observando o gráfico da função *g*, qual é o conjunto solução da inequação $g(x) \geq 0$?
Ana: São os valores que estão acima do eixo *Ox*.
Professor: O intervalo está bem?
Ana: Não! O intervalo é fechado, porque o sinal da inequação é maior ou igual.

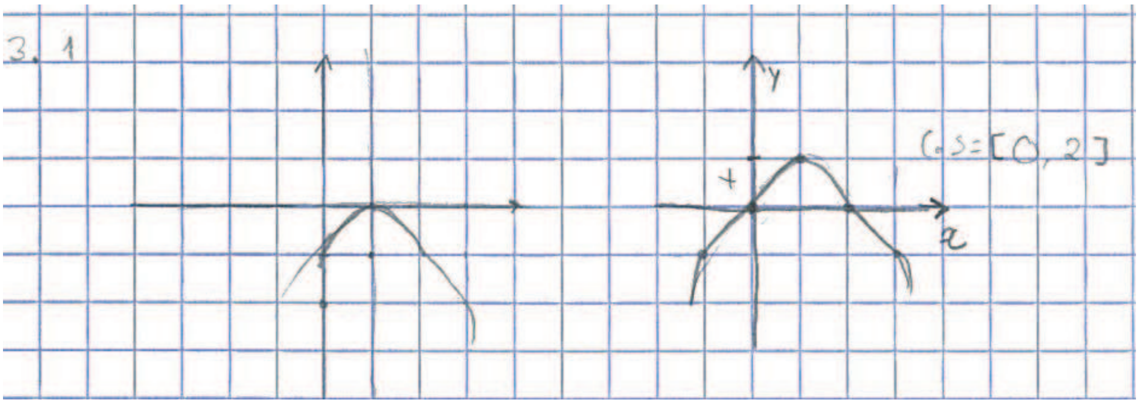


Figura 4.13 – Resolução da questão 3.1 (tarefa da entrevista)

Ana opta por determinar graficamente o conjunto solução da inequação, ao não conseguir resolver algebricamente o exercício. Para tal, teve que representar graficamente a função *g*, evidenciando dificuldades por querer efectuar a transformação da função *f* na função *g*, de uma forma imediata, no lugar de o fazer, de uma forma gradual, ou seja, por passos. Depois de eu lhe sugerir este processo de resolução, a aluna efectuou, em primeiro lugar, a representação gráfica de *–f*, que corresponde à simetria axial em relação ao eixo *Ox* da representação gráfica de *f*, e, em segundo lugar, passou a representação gráfica de *–f* para a representação gráfica de *g*, cuja expressão analítica é dada por $g(x) = -f(x) + 1$, por meio de uma translação vertical associada a um vector $\vec{u}$ de coordenadas (0, 1) (figura 4.13).

Portanto, Ana revelou muitas dificuldades na resolução deste exercício, recorrendo à resolução gráfica, através da transformação de funções, o que afectou claramente o seu desempenho na determinação do conjunto solução da inequação.

4.7 – Síntese

1. Compreensão do conceito de função em diversas representações

Na questão 1, constata-se que Ana sabe a definição de função e reconhece as funções quando são representadas numa tabela, mas, nem sempre as identifica quando surgem representadas gráfica ou algebricamente. Por exemplo, na questão 1.4, a aluna tem dificuldades em reconhecer que a representação gráfica não corresponde a uma função, porque não consegue identificar objectos com mais do que uma imagem, pelo menos, até eu lhe sugerir para pensar no teste da recta vertical. Na questão 1.5, não reconhece que a equação $x^2 + y^2 = 9$ é a equação cartesiana de uma circunferência e, por isso, considera que é a representação algébrica de uma função.

2. Estudo de propriedades de funções em diversas representações

Na tradução da representação gráfica de uma função quadrática para uma representação algébrica, Ana recorda-se que uma função quadrática *f* pode ser representada analiticamente por $f(x) = a(x-h)^2 + k,\ com\ a \neq 0,$ mas revela dificuldades na determinação do parâmetro *a*, porque não consegue recolher informações dadas no enunciado pela representação gráfica da função *f*, tais como, as coordenadas do vértice da parábola e as coordenadas de um outro ponto qualquer do gráfico de *f*. Por exemplo, na questão 3.2, é evidente que a aluna procura determinar a expressão analítica da função *f,* através da expressão $f(x) = a(x-h)^2 + k,\ \ a \neq 0,$ memorizada, efectuando as substituições dos parâmetros *h* e *k* pela abcissa e pela ordenada do vértice da parábola, respectivamente, e, do objecto *x* e da sua imagem por *f*, *f(x)*, pelas coordenadas de um ponto qualquer da parábola, diferente do vértice. No entanto, nunca lhe ocorreu aplicar a transformação de funções a uma função de equação $y = x^2$, para assim, obter *f*. Para tal, bastaria efectuar uma translação horizontal associada ao vector $\vec{u}$, de coordenadas (1, 0). Deste modo, podemos concluir que este facto é o resultado da opção de Ana por processos de resolução algébricos, em detrimento dos processos de resolução gráficos.

Em relação à interpretação dos dados da representação gráfica visualizada no ecrã da calculadora, Ana identifica a generalidade das propriedades da função definida por ramos (restrição de uma função afim e restrição de uma função quadrática). Por exemplo, na questão 2, a aluna considera uma janela de visualização adequada para a representação gráfica na calculadora e reconhece as propriedades da função, tais como, o domínio, o contradomínio e os zeros. No entanto, Ana não é muito rigorosa na representação do esboço do gráfico, porque não desenha as "bolas" aberta e fechada. Apesar disso, Ana revela que conhece e que é capaz de identificar as propriedades de uma função nas representações gráfica e algébrica. Mostra, portanto, que a aprendizagem de algumas propriedades da função afim e da função quadrática ficou consolidada, ao contrário da transformação de funções, conteúdo, no qual, evidencia muitas dificuldades.

3. Representações e processos utilizados em problemas matemáticos

Ana opta por processos algébricos na resolução de problemas matemáticos. Por exemplo, na questão 5.2, ela resolve a inequação do 2.º grau, através de processos algébricos e faz um esboço do gráfico em relação ao eixo *Ox*, para identificar a variação do sinal da função, e assim, determinar o conjunto solução do problema. Quando a função é representada através do seu gráfico, a aluna recorre à transformação de funções, usando processos gráficos na resolução de inequações. Na questão 3.1, a aluna tem enormes dificuldades em fazer o esboço da representação gráfica da função g, porque, apesar de saber que a representação gráfica de $-f$ corresponde à simetria axial em relação ao eixo *Ox* da representação gráfica da função f, não se recorda que a representação gráfica de g se obtém, através de uma translação vertical do gráfico de $-f$ associada a um vector $\vec{u}$ de coordenadas (0, 1). Na tradução de uma representação numérica para uma representação algébrica, Ana usa processos algébricos. Por exemplo, na questão 5.1, Ana interpreta correctamente o problema, adoptando uma estratégia adequada para a sua resolução, subtraindo à área do rectângulo [ABCD] a soma das áreas dos quatro triângulos rectângulos, obtendo deste modo a expressão da área do quadrilátero [EFGH].

Ana prefere aplicar processos algébricos na resolução de problemas matemáticos, em detrimento de processos gráficos, recorrendo a estes, somente, se os dados do problema conduzirem à transformação de funções.

4. Representações e processos usados em problemas da semi-realidade

Na resolução de problemas da semi-realidade, Ana escolhe os processos algébricos e revela um bom desempenho no cálculo de expressões e na resolução de inequações do 2.º grau. Por exemplo, nas questões 4.1 e 4.2, Ana resolve algebricamente, calculando e interpretando correctamente o valor das expressões. Na resolução da inequação do 2.º grau, da questão 4.3, ela usa também processos algébricos, conseguindo determinar a solução do problema, embora apresentasse algumas dificuldades em dar o resultado aproximado ao minuto. Tal como nos problemas matemáticos, Ana revela uma preferência quase exclusiva por processos analíticos na resolução de problemas da semi-realidade, só recorrendo à calculadora para efectuar cálculos que envolvam, por exemplo, somas de números irracionais com números inteiros, ou, quando não consegue resolver uma questão analiticamente.

Capítulo 5

O caso do Daniel

Daniel tem 15 anos, é de nacionalidade portuguesa e vive com os pais em Almada. Tem uma irmã mais velha. O pai tem como habilitação literária, o 12.º ano de escolaridade e a mãe tem um curso superior. Daniel concluiu o 9.º ano de escolaridade com nível médio quatro. Neste ano lectivo, revela um bom desempenho em todas as disciplinas e, em particular, na Matemática, onde obteve no 1.º e 2.º períodos, a classificação de 16 valores e 15 valores, respectivamente, tendo como classificação final, obtida no 3.º período, 14 valores, sendo esta, de todas as classificações obtidas nas outras disciplinas, a sua classificação mais baixa. No questionário, Daniel refere que a sua disciplina favorita é a Matemática. Transitou sempre de ano e gostaria de ter como profissão a de economista, ou a de gestor. Ele quer prosseguir os estudos para o ensino superior, porque considera que, como Portugal está economicamente, só com um curso superior, se tem mais possibilidades de arranjar um bom emprego do qual se goste.

Em relação à disciplina de Matemática, Daniel considera que tem sido um bom aluno nesta disciplina. Daniel refere no questionário que se recorda de um episódio interessante passado na disciplina de Matemática, mais precisamente, no 8.º ano de escolaridade, em que teve nos testes 94% e 96%, respectivamente, e o professor lhe atribuiu como classificação final apenas o nível quatro. O tema de Matemática que o Daniel mais gosta são, neste caso, dois, a Estatística e as Funções, e o tema que menos gosta são as Probabilidades. Neste ano lectivo, Daniel refere que sentiu mais dificuldades na Geometria, apesar de ter sido onde obteve melhores resultados, e que, em anos anteriores, não se recorda de ter tido qualquer tipo de dificuldades.

Daniel afirma que as tarefas que mais gosta de realizar na aula de Matemática são exercícios de grau mais elevado, para, depois, lhe ser mais fácil e estar mais enquadrado com a matéria que está a ser leccionada. Também afirma que gosta de trabalhar com a calculadora gráfica, porque lhe facilita muito as operações relativas às funções, entre muitos outros aspectos. No entanto, também refere que não é a calculadora gráfica que o ajuda a compreender a Matemática, mas sim, os professores estagiários, os apoios dados na sala de estudo e as explicações. Para o Daniel, aprender

Matemática serve para desenvolver a mente. Ele considera a Matemática como uma das disciplinas mais importantes do curso.

Na sala de aula, quando é solicitada a participação do Daniel, ele expõe com facilidade as suas opiniões. É um aluno introvertido que não assume protagonismo no seio da turma, mas quando é questionado, intervém. É um aluno empenhado, atento, interessado e trabalhador, resolvendo grande parte dos trabalhos de casa propostos, muitas das vezes, surpreendendo pela originalidade e brilhantismo no processo de resolução. No entanto, o declínio ligeiro nas notas dos testes de avaliação, a partir do 2.º período, e que se acentuou no 3.º período, esteve relacionado com problemas de índole pessoal, relacionados com a saúde dos seus familiares, problemas esses que o Daniel ultrapassou, revelando enorme maturidade.

5.1 – Reconhecimento do conceito de função

Na questão 1 da tarefa da entrevista (nesta questão, é pedido ao aluno para identificar quais das seguintes representações – Tabela, gráficos e expressões algébricas, correspondem funções), Daniel define correctamente o conceito de função, reconhecendo em todas as situações apresentadas as representações que são funções, apesar de, na questão 1.5, afirmar que aquela equação corresponde graficamente a uma parábola, não a identificando como sendo a equação de uma circunferência no plano. Na questão 1.1, o aluno refere que a representação na tabela não corresponde a uma função, porque existem objectos que têm mais do que uma imagem. Por exemplo, ao objecto –6 correspondem duas imagens, –15 e 15, o que contradiz a definição de função, a cada objecto corresponde uma e uma só imagem, existindo assim uma correspondência unívoca entre objecto e imagem. Na questão 1.2, o aluno refere que a representação gráfica corresponde a uma função, justificando com a definição de função, a cada objecto corresponde uma e uma só imagem. Daniel também chega à conclusão que o domínio da função é uma restrição do conjunto dos números reais, e que, como a sua representação gráfica tem duas semi-rectas, esta função é uma função definida por ramos. Na questão 1.3, o aluno afirma que a representação gráfica não corresponde a uma função, porque existem objectos, aos quais, correspondem mais do que uma imagem. Na questão 1.4, o aluno justifica que é função pela definição, sentindo necessidade de utilizar a calculadora para observar a sua representação gráfica, referindo que se trata de uma recta com declive negativo, –3, e que a função é afim. Na questão 1.5, Daniel reconhece que a equação não corresponde a uma função, justificando pela definição de função, mas não a identifica como a equação cartesiana de uma circunferência. Ele identificou-a como sendo a equação de uma parábola. Analisemos o seguinte diálogo ocorrido durante a entrevista:

> Professor: É função?
> Daniel: Não é!
> Professor: Porquê?
> Daniel: Porque, cada objecto tem sempre duas imagens.
> Professor: Essa equação corresponde à representação gráfica de um lugar geométrico bem conhecido. Qual é?
> Daniel: Lugar geométrico?!
> Professor: Quando um conjunto de pontos tem em comum determinadas características, estes pertencem ao mesmo lugar geométrico.
> Daniel: Então, o lugar geométrico é uma parábola.
> Professor: Não, é a equação cartesiana de uma circunferência.
> Daniel: Ah, pois é! O raio é 3 e o centro (0, 0).
> Professor: Justifica-me com um exemplo concreto o porquê desta equação não corresponder a uma função.
> Daniel: Como?
> Professor: Primeiro, representa graficamente a circunferência.
> …
> Daniel: Então, por exemplo, o 1 tem duas imagens.
> Professor: Quais são?
> Daniel: Não sei.
> Professor: Escolhe um outro ponto, para que me possas dizer quais são as suas coordenadas.
> Daniel: Por exemplo, para $x = 0$, $y = 3$ e $y = –3$.

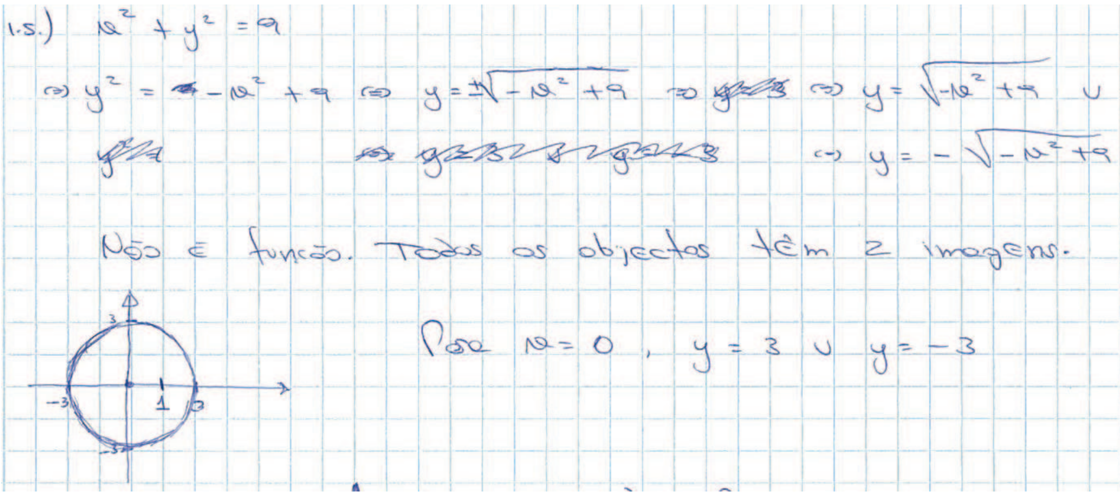


Figura 5.1 – Resolução da questão 1.5 (tarefa da entrevista; 20/Maio/2010)

Tal como Ana, Daniel não reconhece que a equação $x^2 + y^2 = 9$ é a equação cartesiana de uma circunferência no plano. Por isso, esta equação do 2.º grau induz o aluno a considerar que é a equação de uma função quadrática, cuja representação gráfica é uma parábola, apesar do aluno referir inicialmente que aquela equação não corresponde a uma função, pois, contradiz a definição de função. No entanto, depois de eu lhe dizer que a equação é a equação cartesiana de uma circunferência, o aluno identifica imediatamente que o raio é 3, e o ponto de coordenadas (0, 0) é o seu centro. Quando lhe peço para me dar um exemplo em concreto, que mostre que aquela equação não é uma função, Daniel, tal como Ana, sente dificuldades, porque não tem a iniciativa de representar graficamente a circunferência na folha de respostas. Depois do Daniel efectuar a representação gráfica, ele dá o exemplo para $x = 0$, $y = 3$ e $y = -3$.

O seu desempenho nesta questão é bom. Daniel não revela dificuldades em identificar funções, quer na sua representação gráfica, quer na sua representação em tabela. O aluno apenas revelou dificuldades na identificação de funções representadas algebricamente, ao não conseguir identificar a equação cartesiana de uma circunferência. Assim, Daniel escreve correctamente a definição de função e reconhece as representações gráficas e, em tabelas, que são funções. No entanto, por vezes, não identifica as representações algébricas que são funções.

5.2 – Representação gráfica de uma função visualizada no ecrã da calculadora

Na questão 2 da tarefa da entrevista (nesta questão, é pedido ao aluno que transcreva para a folha de respostas a representação gráfica de uma função definida por ramos, visualizada no ecrã da calculadora gráfica, que identifique algumas das suas propriedades e escreva os parâmetros da janela de visualização do gráfico), Daniel apresenta uma representação gráfica da função *g*, definida por ramos, sendo um dos ramos a restrição de função afim e o outro, a restrição de uma função quadrática. Ele considera algumas propriedades importantes como o domínio, o contradomínio, os pontos de intersecção com os eixos coordenados e o mínimo absoluto, mas não representa inicialmente no gráfico a “bola” aberta, para $x < 0$, e a “bola” fechada, para

$x \geq 0$. Também, não é muito rigoroso na representação gráfica da semi-recta, por não respeitar o seu declive.

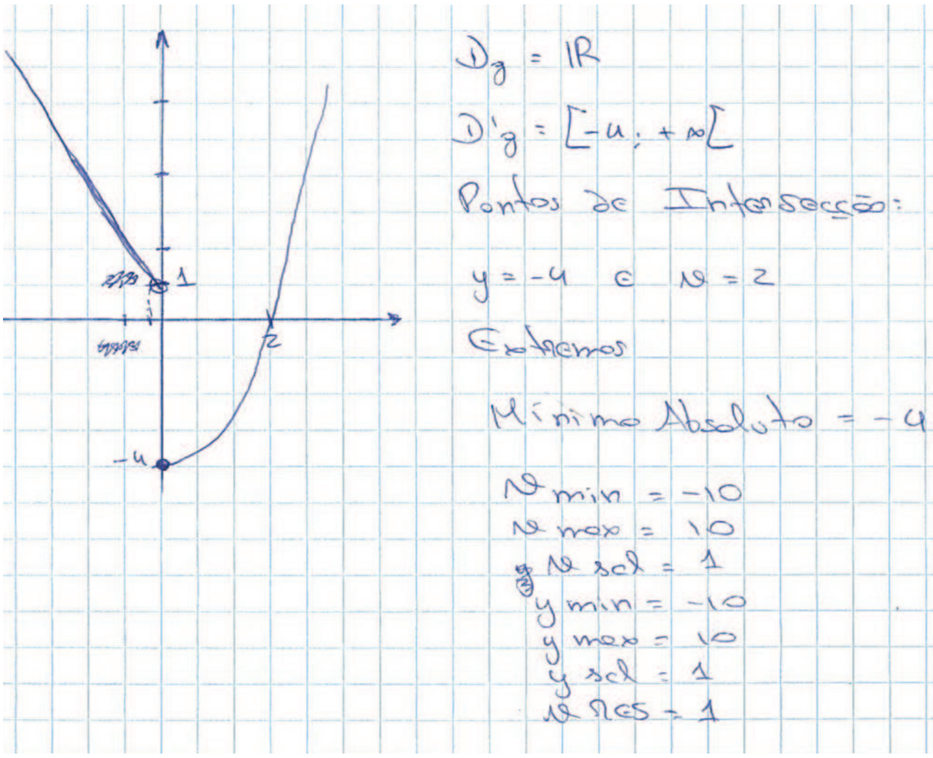


Figura 5.2 – Resolução da questão 2 (tarefa da entrevista)

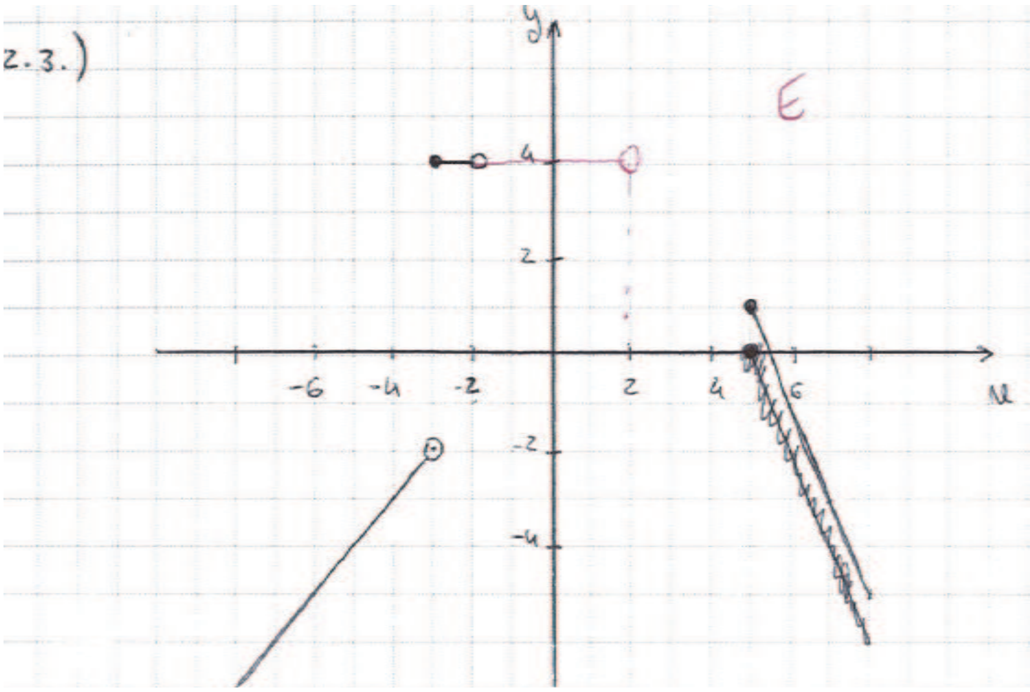


Figura 5.3 – Resolução da questão 2.3 (teste de 12/Março/2010)

Foi pedido ao aluno durante a entrevista, para descrever todo o processo usado na resolução do exercício, que envolveu a utilização da calculadora. Analisemos esse mesmo diálogo extraído da entrevista:

> Professor: Qual é o tipo dessa função?
> Daniel: Por ramos.
> Professor: Descreve-me como conseguiste representar graficamente esta função na calculadora gráfica.
> Daniel: Então, primeiro escrevi $y_1 = (-3x+1)/(x<0)$. Depois, escrevi $y_2 = (x^2-4)/(x \geq 0)$, fiz o gráfico na calculadora e passei para a folha.
> Professor: Lembras-te de colocarmos bolas nas representações gráficas?
> Daniel: Ah! A bola é aberta no ponto (0, 1) e fechada no ponto (0, –4).

A entrevista permite perceber que o Daniel conhece as propriedades de uma função definida por ramos, sendo um dos ramos a restrição de uma função afim e o outro ramo, a restrição de uma função quadrática. Assim, observa-se que o aluno transcreve a representação gráfica do ecrã da calculadora para a folha de respostas, mas não tem em conta algumas propriedades, como é o caso dos pontos com "bola" aberta e "bola" fechada, que a calculadora gráfica não evidencia, e o declive da semi-recta. No entanto, Daniel revela que conhece e é capaz de identificar as propriedades de uma função, através da representação gráfica da função visualizada no ecrã da calculadora. Daniel também revelou conseguir inserir na calculadora gráfica uma função definida por ramos, inserindo, em primeiro lugar, a expressão da semi-recta e, em segundo lugar, a expressão correspondente à representação gráfica, parcial, da parábola.

5.3 – Tradução de uma representação gráfica numa representação algébrica

Na questão 3.2 da tarefa da entrevista (nesta questão, é pedido ao aluno que escreva uma expressão algébrica que represente a função quadrática *f*, cuja representação gráfica é dada no enunciado), Daniel apresenta um raciocínio correcto para a sua resolução, assim como, todos os cálculos para justificar a sua resposta. No entanto, comete um erro de cálculo, ao determinar o valor de *a*, e nunca indica correctamente a expressão analítica da função *f*. Consequentemente, Daniel também usa, de uma forma pouco rigorosa, o sinal equivalente, como se pode observar na seguinte figura:

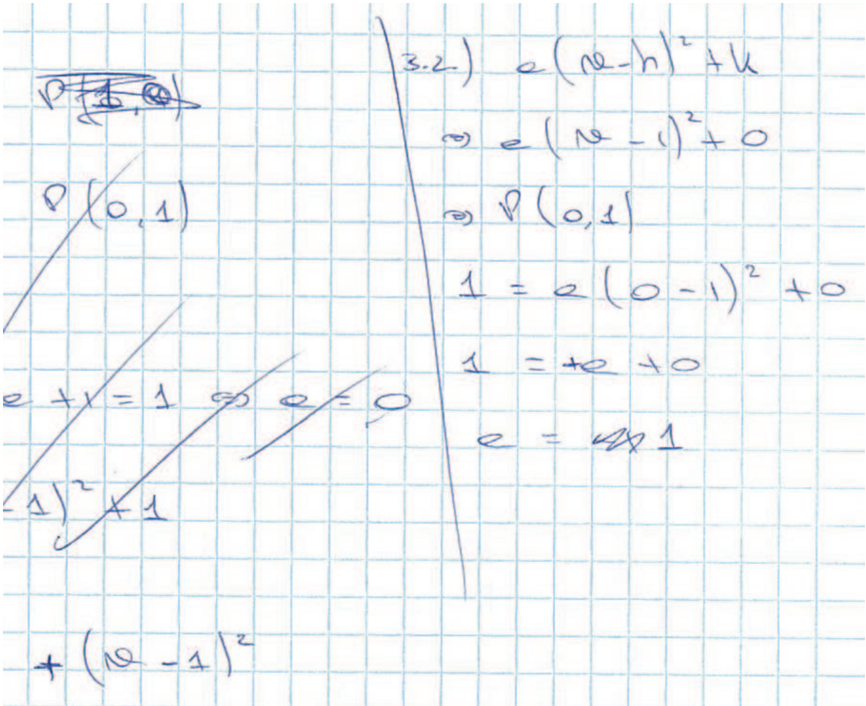


Figura 5.4 – Resolução da questão 3.2 (tarefa da entrevista)

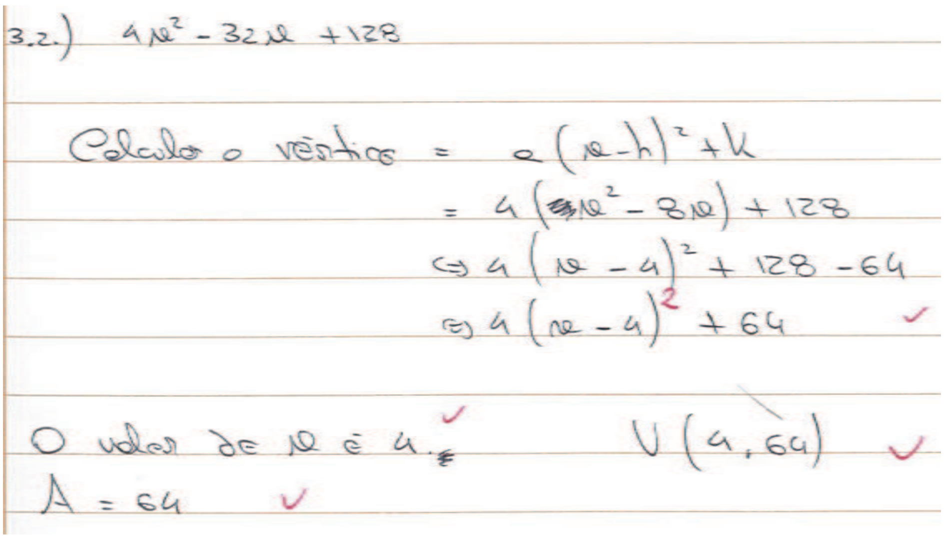


Figura 5.5 – Resolução da questão 3.2 (versão 2 do teste intermédio de 5/Maio/2010)

Durante a entrevista, foi-lhe pedido que explicasse como é que se determina o valor de *a*:

> Professor: Isto, $[y = -(x-1)^2 + 1]$, está bem?
> Daniel: Sim.
> Professor: Qual é o vértice do gráfico de *f*?

Daniel: É o ponto (1, 0). Ah! É $y = -(x-1)^2$.
Professor: Explica-me como é que calculaste o *a*?
Daniel: Considerei o ponto (0, 1), e substituí na expressão $y = a(x-1)^2$.
Professor: O *a* não pode ser –1. Qual é o sentido da concavidade do gráfico de *f*?
Daniel: É voltado para cima. Enganei-me em $(0-1)^2 = (-1)^2$, porque o –1 está ao quadrado.

Deste modo, Daniel mostra que se recorda dos processos de resolução, que permitem determinar a equação do tipo $y = a(x-h)^2 + k,\ com\ a \neq 0$. Ele começa por substituir os parâmetros *h* e *k*, que correspondem à abcissa e à ordenada do vértice da parábola, respectivamente. Depois, para determinar o parâmetro *a*, ele identifica as coordenadas de um ponto da parábola, diferente do vértice, substituindo o *x* pela abcissa desse ponto e o *y* pela ordenada desse mesmo ponto, obtendo assim o valor de *a* e, consequentemente, a equação do tipo $y = a(x-h)^2 + k,\ com\ a \neq 0$.

5.4 – Tradução de uma representação numérica numa representação algébrica

Na questão 5.1 da tarefa da entrevista (nesta questão, é pedido ao aluno para mostrar que a área *A* do quadrilátero [EFGH], inscrito no rectângulo [ABCD], é dada em função de *x* pela expressão: $A(x) = 2x^2 - 16x + 60$), Daniel, tal como Ana, também determina correctamente a medida do comprimento da hipotenusa de cada um dos triângulos rectângulos da figura, $\overline{EF}$ e $\overline{EH}$, mas mostra dificuldades no cálculo da área do quadrilátero [EFGH], inscrito no rectângulo [ABCD], como se verifica no seguinte diálogo extraído da entrevista:

Professor: Qual é o processo que vais utilizar?
Daniel: Vou utilizar o teorema de Pitágoras.
...
Professor: Como verificaste, é difícil resolver o problema por esse processo. Pensa num outro processo de resolução.
Daniel: Não me ocorre...
Professor: Pensa em áreas.
Daniel: Então, é a área do rectângulo menos as áreas dos quatro triângulos.
Professor: Está certo!

Como se pode observar, o aluno percebeu que o processo inicial não o conduz à expressão da área do quadrilátero [EFGH]. Depois de eu ter sugerido ao Daniel para pensar em áreas, constata-se que o aluno compreendeu que a área do quadrilátero [EFGH] é igual à diferença da área do rectângulo [ABCD] com a soma das áreas dos quatro triângulos rectângulos. Assim, podemos concluir que Daniel faz uma interpretação correcta do problema, convertendo-o numa representação algébrica.

Na figura seguinte, podemos observar como o Daniel resolveu, faltando-lhe, no entanto, algum rigor na indicação do cálculo da área do quadrilátero [EFGH], uma vez que ele não a identifica ($A(x) = 2x^2 - 16x + 60$).

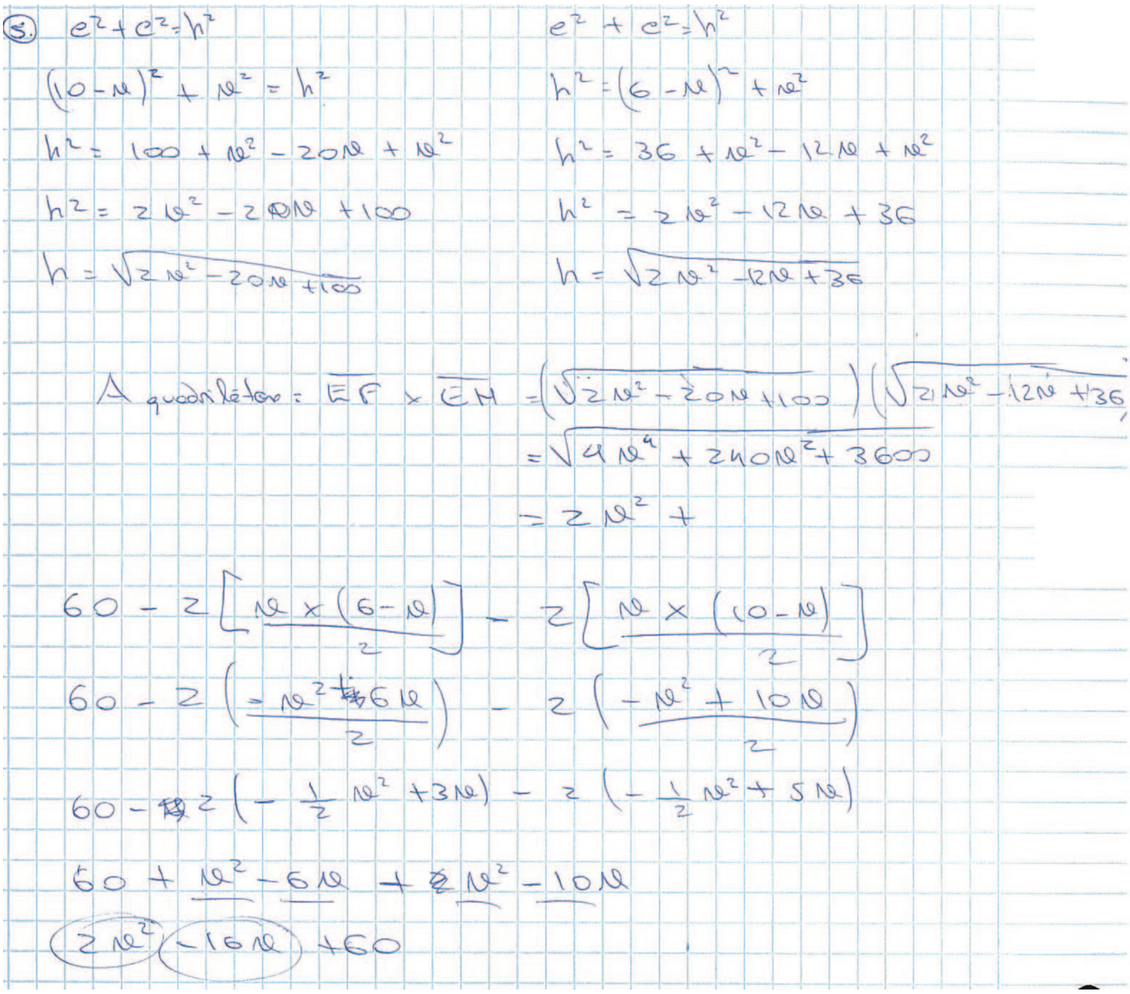


Figura 5.6 – Resolução da questão 5.1 (tarefa da entrevista)

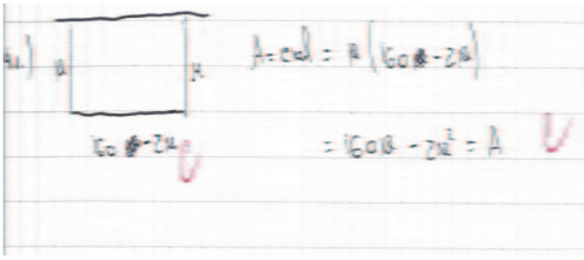


Figura 5.7 – Resolução da questão 4.1 (teste de 12/Março/2010)

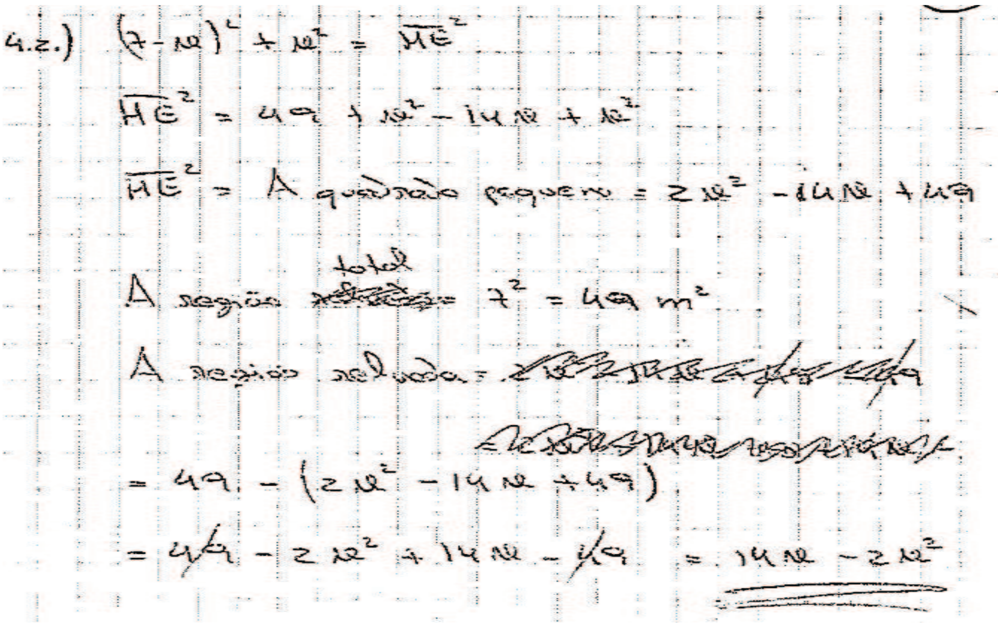


Figura 5.8 – Resolução da questão 4.2 (teste de 25/Maio/2010)

5.5 – Opção por processos algébricos na resolução de problemas

Na questão 4.1 da tarefa da entrevista (nesta questão, é pedido ao aluno para determinar o número de pessoas que se encontra no recinto, às 17 horas; o enunciado do problema diz-nos que o número de pessoas no recinto de um festival rock em Lisboa, entre as 16h e as 24h, varia em função de *t* e pode ser dado aproximadamente por $N(t) = -2\,t^2 + 8\,t + 24$, sendo *N* o número de pessoas em **milhares** e *t* dado em **horas**, correspondendo $t = 0$ às 18 h), Daniel opta por uma resolução algébrica. Ele atribui à variável tempo *t* o valor correcto, ao considerar que, às 17 horas, esse valor é igual a –1. No entanto, não calcula correctamente o valor de $N(-1)$, porque, ao efectuar a substituição da variável *t* por –1, eleva ao quadrado o coeficiente do termo do 2.º grau, -2. Apesar do resultado estar errado, ele apresenta a sua resposta em milhares de pessoas.

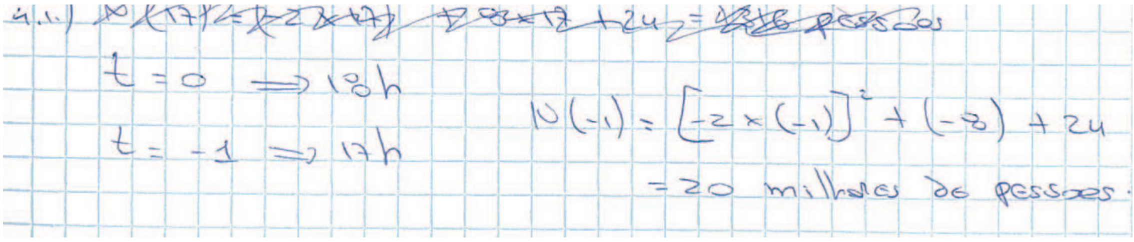


Figura 5.9 – Resolução da questão 4.1 (tarefa da entrevista)

Na questão 4.2 (nesta questão, é pedido ao aluno que calcule *N(2) – N(1)* e interprete o resultado no contexto do problema), Daniel também determina algebricamente os valores de *N(1)* e *N(2)*, não cometendo o erro referido na questão 4.1, o que mostra que estava desatento, ou pouco concentrado na resolução da questão 4.1. Depois, efectua a diferença entre estes dois valores e interpreta correctamente o resultado obtido no contexto do problema.

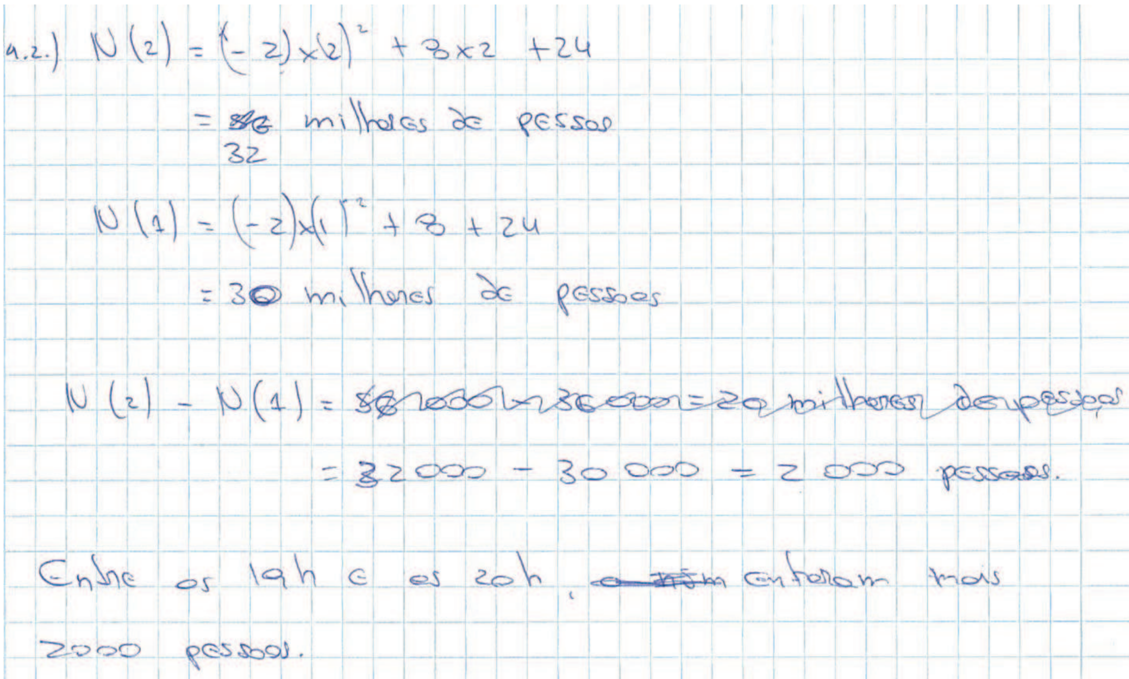
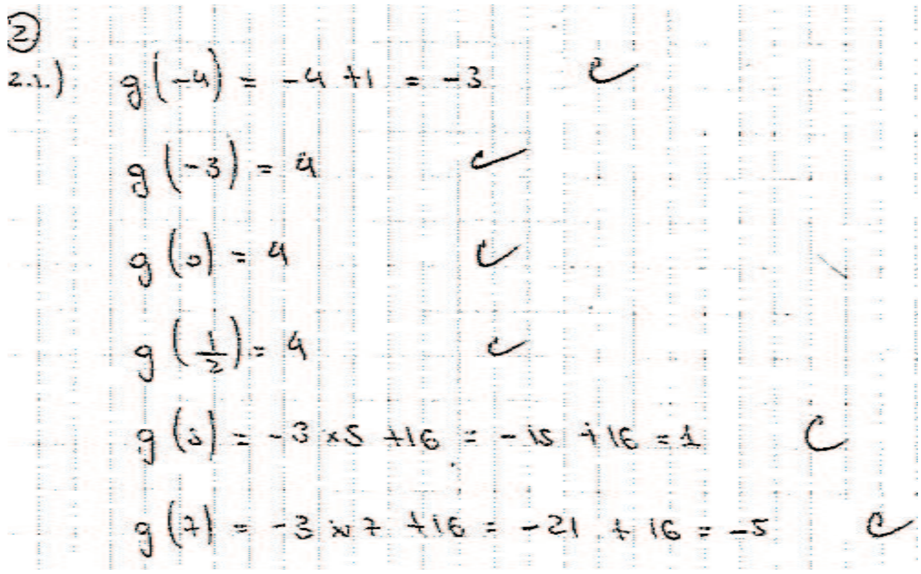


Figura 5.10 – Resolução da questão 4.2 (tarefa da entrevista)



2

2.1.) $g(-4) = -4+1 = -3$ C

$g(-3) = 4$ C

$g(0) = 4$ C

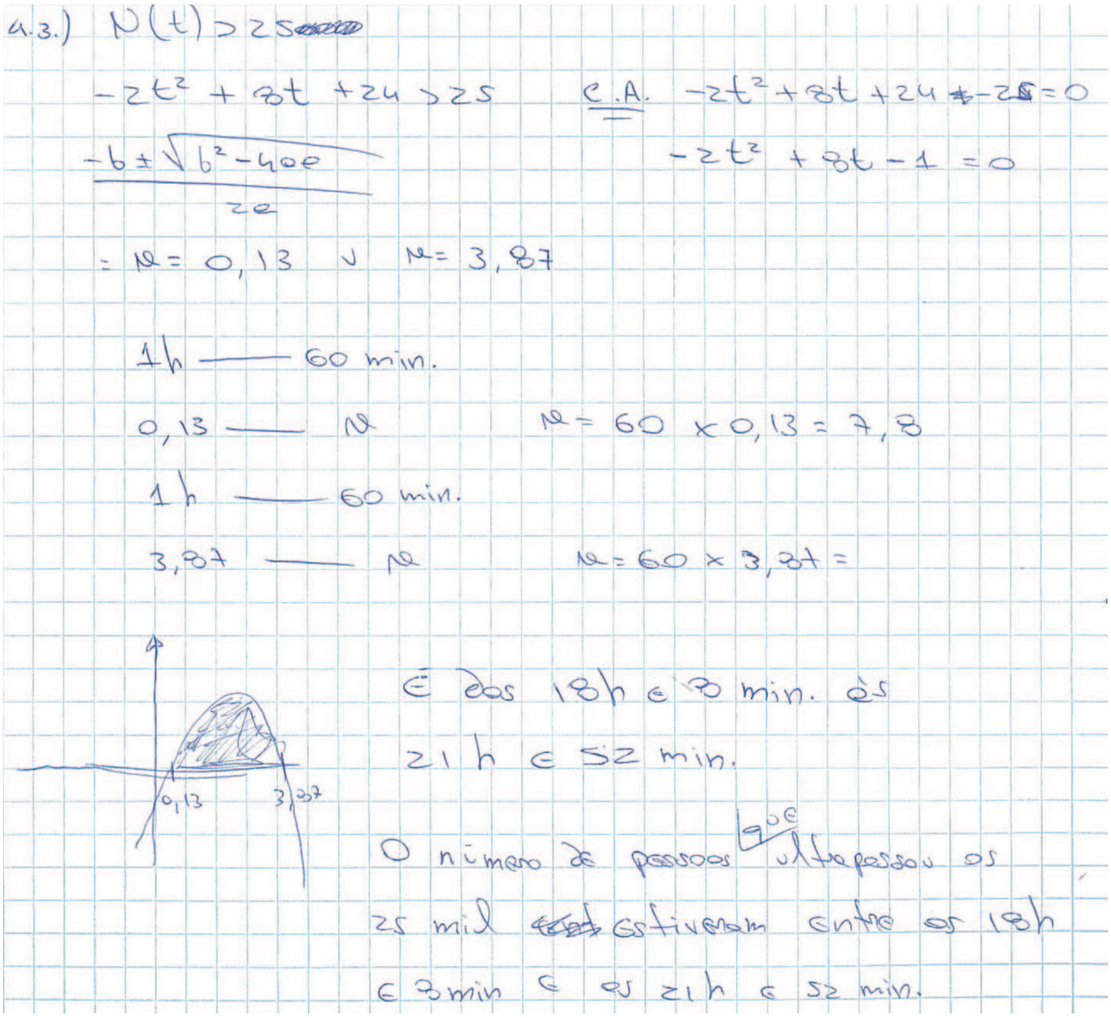
$g\left(\frac{1}{2}\right) = 4$ C

$g(5) = -3 \times 5 + 16 = -15 + 16 = 1$ C

$g(7) = -3 \times 7 + 16 = -21 + 16 = -5$ C

Figura 5.11 – Resolução da questão 2.1 (teste de 25/Maio/2010)

Na questão 4.3 (nesta questão, é pedido ao aluno que determine entre que horas o número de pessoas ultrapassou as 25000 pessoas, dando o resultado aproximado ao minuto), Daniel, tal como Ana, usa a resolução algébrica, apresentando todos os processos, incluindo a identificação da variação do sinal da função quadrática.



4.3.) $N(t) > 25$

$-2t^2 + 8t + 24 > 25$ C.A. $-2t^2 + 8t + 24 - 25 = 0$

$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $-2t^2 + 8t - 1 = 0$

$= x = 0{,}13 \vee x = 3{,}87$

1h —— 60 min.

0,13 —— x $x = 60 \times 0{,}13 = 7{,}8$

1h —— 60 min.

3,87 —— x $x = 60 \times 3{,}87 =$

0,13 3,87

É das 18h e 8 min. às 21 h e 52 min.

O número de pessoas que ultrapassou os 25 mil estiveram entre as 18h e 8 min e as 21 h e 52 min.

Figura 5.12 – Resolução da questão 4.3 (tarefa da entrevista)

No entanto, Daniel, da mesma forma que Ana, evidenciou dificuldades na interpretação dos valores 0,13 e 0,87, e na sua respectiva tradução em minutos, como se pode observar no seguinte diálogo, extraído da entrevista:

> Professor: Qual é o resultado?
> Daniel: O resultado de 0,13 é de 18h15m.
> Professor: Concordo contigo em relação às horas. Mas, pelo enunciado, o resultado tem que ser aproximado ao minuto. Como é que eu aproximo t = 0,13 ao minuto?
> Daniel: ...
> Professor: 1 hora corresponde a quantos minutos?
> Daniel: A 60 minutos. Então, faço uma regra de três simples.
> Professor: Tens necessidade de passar o número 3,87 todo a minutos?
> Daniel: Não, porque 60 × 3,87 = 232, 2 minutos. Não sei a hora.
> Professor: Pensa no t = 0, t = 1, t = 2 e olha para os zeros da expressão.
> Daniel: Então, t = 0 são 18 h, t = 1 são 19 h, t = 2 são 20 h e t = 3 são 21 h.
> Professor: E, em relação ao número 3,87?

Daniel: São 21h87m.
Professor: Errado! Tal como $0,13$, $0,87$ são centésimas da hora. Por isso, tens que converter em minutos.
Daniel: Então, aplico outra vez a regra de três simples.

Na questão 5.2 (nesta questão, é pedido ao aluno que determine, para que valores de *x*, a área *A* é inferior ou igual a 46 cm^2; através da questão 5.1, a expressão analítica da área *A* do quadrilátero [EFGH], dada em função de *x*, é conhecida, sendo $A(x) = 2x^2 - 16x + 60$), Daniel, tal como Ana, determina correctamente as raizes da equação $2x^2 - 16x + 14 = 0$, embora, durante a aplicação da fórmula resolvente, não tenha mantido a expressão igual a zero, substituindo o símbolo de equivalência pelo sinal igual, o que mostra alguma falta de rigor na apresentação das resoluções.

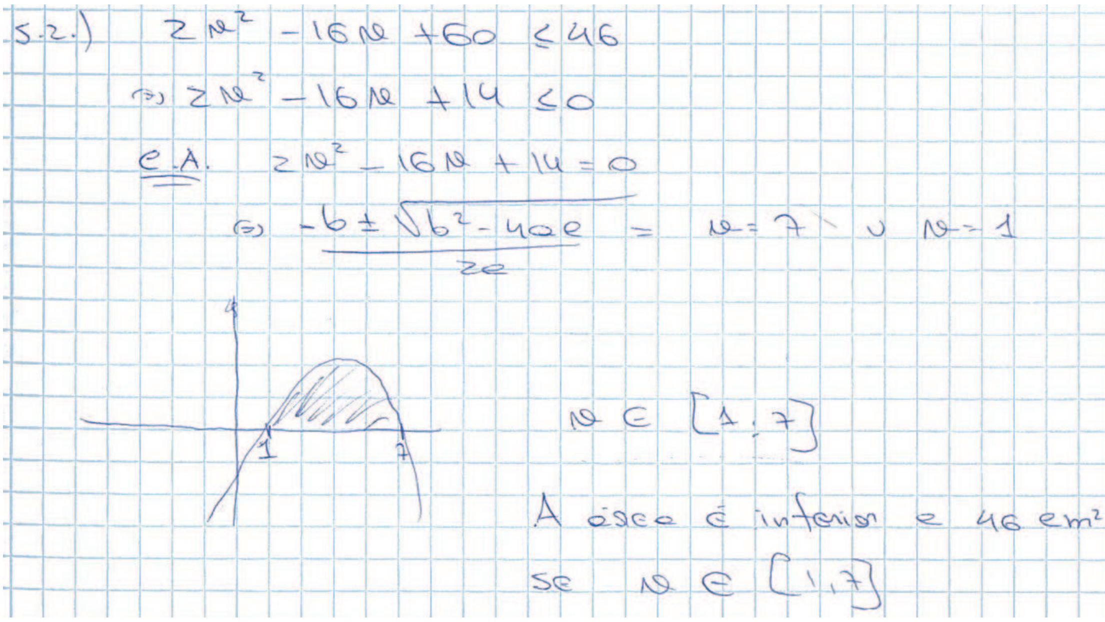


Figura 5.13 – Resolução da questão 5.2 (tarefa da entrevista)

Durante a entrevista, Daniel é questionado sobre o processo que lhe permitiu resolver a inequação:

Professor: Porque é que consideraste o intervalo fechado, situado entre os números 1 e 7, como o conjunto solução da inequação?
Daniel: Porque a função é negativa entre 1 e 7.
Professor: E, porque é que o intervalo é fechado?
Daniel: Porque o sinal da inequação é menor ou igual.
Professor: Qual é o tipo de gráfico?
Daniel: Uma parábola.
Professor: Voltada para cima ou para baixo?

Daniel: Para cima.
Professor: Porquê?
Daniel: Porque $a > 0$.

Assim, Daniel mostra que sabe qual é a variação do sinal da função, apesar de ter realizado o esboço do gráfico de uma maneira incorrecta.

O aluno mostra ter preferência pela resolução algébrica. No entanto, recorre frequentemente à calculadora, para efectuar representações gráficas de funções e identificar algumas das suas propriedades, como por exemplo, a intersecção do gráfico da função com os eixos coordenados e os extremos, usando para o efeito o comando TRACE, ou, recorrendo à tabela da função, através do comando 2nd > Table, assim como, para confirmar resultados. Daniel revela um bom desempenho ao nível do cálculo de expressões e de resolução de inequações do 2.º grau, embora não seja rigoroso na escrita matemática, não respeitando as regras elementares que envolvem condições e proposições.

5.6 – Opção por processos gráficos na resolução de condições

Daniel, tal como Ana, também sentiu algumas dificuldades na resolução da questão 3.1 (nesta questão, é pedido ao aluno que determine o conjunto solução da inequação $g(x) \geq 0$, sabendo que $g(x) = -f(x) + 1$; a representação gráfica da função quadrática *f* é dada no enunciado). O seguinte diálogo é prova desse facto:

Daniel: *g* é uma transformação da função *f*. Como é que começo a resolver?
Professor: Podes resolver graficamente, por passos.
Daniel: …
Professor: –*f* representa que tipo de transformação da função *f*?
Daniel: Não sei.
Professor: O que é que acontece ao gráfico de *f*, se multiplicarmos as imagens por –1?
Daniel: A parábola fica voltada para baixo.
Professor: E o valor de $-f(x)$ para $x = 1$?
Daniel: Não se altera. É o mesmo de $f(x)$. O vértice não muda de posição.
Professor: Não existe rigor na tua representação gráfica. Em que ponto o gráfico de *f* intersecta o eixo *Oy*?
Daniel: No ponto (0, 1).
Professor: Qual é a imagem de 0 por –*f*?

Daniel: É –1.
Professor: E agora, *–f(x)* + 1…
Daniel: O gráfico desloca-se uma casa para a esquerda.
Professor: Errado. Estás a confundir com o caso em que adicionamos um valor a *x*, que está dentro de parênteses..
Daniel: Pois é! Então, o gráfico de *–f* sobe uma unidade para cima?
Professor: Certo!

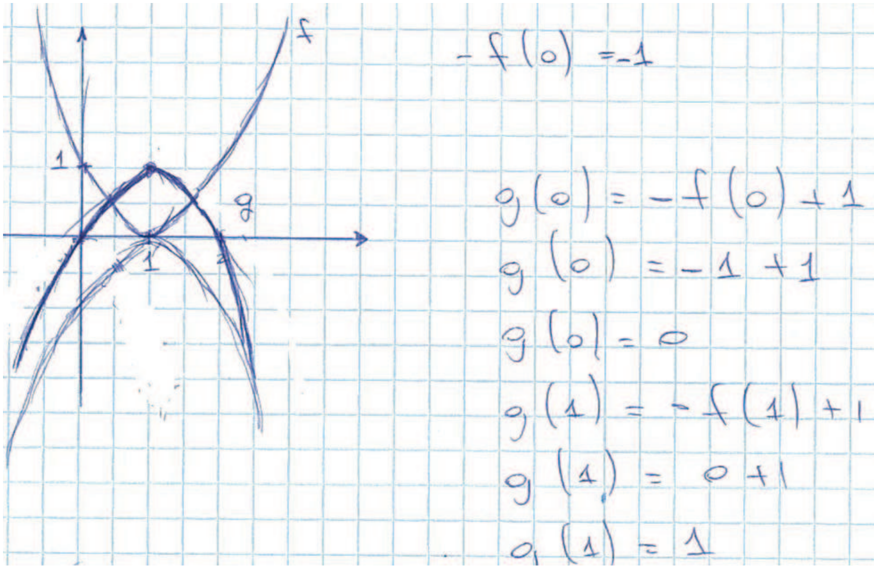


Figura 5.14 – Resolução da questão 3.1 (tarefa da entrevista)

Daniel pede-me para lhe sugerir como resolver esta questão, uma vez que, não consegue resolvê-la algebricamente. Eu digo-lhe que ele pode resolver esta questão graficamente, por passos. Desta forma, Daniel opta por determinar graficamente o conjunto solução desta inequação. Numa primeira instância, Daniel revela dificuldades em identificar o gráfico de *–f* como sendo a transformação do gráfico de *f*, por meio de uma simetria axial em relação ao eixo *Ox*. Depois, na passagem do gráfico de *–f* para o gráfico de *g*, cuja expressão analítica é dada por *g(x)* = *–f(x)* + 1, o aluno efectua uma translação horizontal associada ao vector $\vec{v}$ de coordenadas (–1, 0), o que está errado, porque o gráfico de *g* obtém-se do gráfico de *–f*, através de uma translação vertical associada ao vector $\vec{u}$ de coordenadas (0, 1). No entanto, após a minha correcção, o aluno efectua a translação correcta do gráfico de *–f*, para assim obter o gráfico de *g*. Neste caso, é visível um mau desempenho do Daniel na determinação do conjunto solução da inequação $g(x) \geq 0$, pois não o indicou na folha de respostas.

5.7 – Síntese

1. Compreensão do conceito de função em diversas representações

Na questão 1, Daniel define correctamente o conceito de função e reconhece as funções quando são definidas na representação gráfica, ou em tabela, mas, nem sempre as identifica quando surgem na representação algébrica. Por exemplo, na questão 1.5, o raciocínio do Daniel é contraditório, porque afirma que a equação $x^2 + y^2 = 9$ não corresponde a uma função, pois, existem objectos com mais do que uma imagem, ou seja, aplica o conceito de função e, no entanto, também afirma que a representação gráfica desta expressão é uma parábola (com eixo de simetria paralelo ao eixo *Oy*). Assim, tal como Ana, a equação do 2.º grau induz o aluno a considerar que esta é a equação de uma função quadrática, cuja representação gráfica é uma parábola, não a identificando correctamente como sendo a equação cartesiana de uma circunferência.

2. Estudo de propriedades de funções em diversas representações

Na questão 3.2, mais especificamente, na tradução da representação gráfica de uma função quadrática para uma representação algébrica, Daniel apresenta uma equação correcta do tipo $y = a(x-h)^2 + k,\ com\ a \neq 0$, identificando correctamente as coordenadas do vértice, *(h, k)*, e as coordenadas de um outro ponto na representação gráfica da função, *(x, y)*, tendo como objectivo, determinar o parâmetro *a*, efectuando, para o efeito, todas as substituições necessárias na equação $y = a(x-h)^2 + k,\ a \neq 0$. No entanto, comete um erro de cálculo ao determinar *a*, fruto da falta de concentração. Assim, tal como Ana, nunca lhe ocorre aplicar a transformação de funções à função de equação $y = x^2$, para, depois, obter *f*. Deste modo, podemos concluir que este facto é o resultado da opção do Daniel por processos de resolução algébricos, em detrimento de processos de resolução gráficos.

Quanto à interpretação dos dados da representação gráfica visualizada no ecrã da calculadora, Daniel identifica a generalidade das propriedades da função definida por ramos (restrição de uma função afim e restrição de uma função quadrática). Por exemplo, na questão 2, o aluno considera uma janela de visualização adequada para a representação gráfica na calculadora, e reconhece algumas propriedades da função, tais como, o domínio, o contradomínio e os zeros. No entanto, Daniel não é muito rigoroso na representação do esboço do gráfico, porque não desenha as “bolas” aberta e fechada, e não respeita o declive da semi-recta. Daniel mostra que conhece e que é capaz de identificar as propriedades de uma função, recorrendo à sua representação gráfica visualizada no ecrã da calculadora.

Resumindo, Daniel identifica as propriedades de uma função, através das representações gráfica e algébrica, o que constitui um facto revelador de que a aprendizagem de algumas propriedades da função afim e da função quadrática foi interiorizada.

3. Representações e processos utilizados em problemas matemáticos

Daniel opta por processos algébricos na resolução de problemas matemáticos. Por exemplo, na questão 5.2, ele resolve a inequação do 2.º grau através de processos algébricos, mas, ao contrário de Ana, apesar de identificar correctamente a variação do sinal da função durante a entrevista, efectua o esboço do gráfico da função de uma forma errada. No entanto, determina correctamente o conjunto solução da inequação, porque, depois de calcular os zeros da equação, resolveu mentalmente o problema. Quando a função é representada graficamente, o aluno recorre à transformação de funções, resolvendo inequações através de processos gráficos. Na questão 3.1, o aluno tem grandes dificuldades em fazer o esboço da representação gráfica da função g, porque, ao contrário de Ana, não consegue identificar o gráfico de $-f$ como sendo a transformação do gráfico de f, por meio de uma simetria axial em relação ao eixo Ox. Consequentemente, o aluno transforma o gráfico de $-f$ no gráfico de g, através de uma translação vertical associada ao vector $\vec{u}$ de coordenadas (0, 1), mas só depois de eu lhe ter dito que a transformação do gráfico de $-f$ no gráfico de g, por uma translação horizontal associada ao vector $\vec{v}$ de coordenadas (–1, 0) estava errada.

Na tradução de uma representação numérica para uma representação algébrica, Daniel usa processos algébricos. Por exemplo, na questão 5.1, Daniel interpreta correctamente o problema, optando por uma estratégia de resolução adequada, que consiste em obter a expressão analítica da área do quadrilátero [EFGH], através da subtracção das áreas dos quatro triângulos rectângulos à área do rectângulo [ABCD].

Daniel opta por processos algébricos na resolução de problemas matemáticos, em detrimento de processos gráficos, e recorre a estes, apenas, se os dados do problema conduzirem à transformação de funções.

4. Representações e processos utilizados em problemas da semi-realidade

Daniel, tal como Ana, opta por processos algébricos na resolução de problemas da semi-realidade, revelando um bom desempenho no cálculo de expressões e na resolução de inequações do 2.º grau. Por exemplo, nas questões 4.1 e 4.2, Daniel resolve de uma forma algébrica, calculando e interpretando correctamente o valor das expressões. Na resolução da inequação do 2.º grau da questão 4.3, o aluno também utiliza processos algébricos, conseguindo determinar a solução do problema, embora tenha apresentado algumas dificuldades em dar o resultado aproximado ao minuto. Tal como nos problemas matemáticos, Daniel revela preferência por processos algébricos na resolução de problemas da semi-realidade. No entanto, ele recorre à calculadora para efectuar cálculos, confirmar resultados e visualizar gráficos de funções, extraindo destes, informações importantes para a identificação de algumas propriedades das funções.

Capítulo 6

O caso do Filipe

Filipe tem 15 anos, é de nacionalidade portuguesa e vive com os pais e com o irmão em Almada. Concluiu o 9.º ano de escolaridade com nível médio quatro. Neste ano lectivo, revela um bom desempenho em todas as disciplinas e, em particular, na Matemática, onde obteve no 1.º e 2.º períodos, a classificação de 14 valores e 13 valores, respectivamente, tendo como classificação final, obtida no 3.º período, 15 valores. No questionário, Filipe refere que a sua disciplina favorita é Educação Física. Transitou sempre de ano e gostaria de ter uma profissão ligada à área da Economia, ou da Gestão. Ele quer prosseguir os estudos para o ensino superior, porque, só assim conseguirá ter uma profissão nas áreas anteriormente referidas.

Em relação à disciplina de Matemática, Filipe considera que tem sido um bom aluno nesta disciplina, porque faz os exercícios todos e porta-se bem. Filipe refere no questionário que não se recorda de nenhuma experiência interessante na disciplina de Matemática. O tema de Matemática que o Filipe mais gosta é a Estatística, e o tema que menos gosta é a Geometria, porque não gosta, nem de triângulos, nem de rectângulos, nem de imaginar figuras geométricas em perspectiva. Neste ano lectivo, Filipe refere que sentiu mais dificuldades na resolução dos exercícios do Gave que serviram de preparação para os testes intermédios, e que, em anos anteriores, não se recorda de ter tido grandes dificuldades na matéria dada na disciplina de Matemática.

Filipe afirma que as tarefas que mais gosta de realizar na aula de Matemática são desenhar gráficos na calculadora gráfica e fazer tabelas a partir de dados estatísticos. Também afirma que gosta de trabalhar com a calculadora gráfica, porque pode inserir a expressão analítica de qualquer função com o intuito de visualizar o seu gráfico. Para o Filipe, a calculadora gráfica ajuda-o a compreender a Matemática, porque, sem ela, não conseguiríamos fazer inúmeras coisas, como por exemplo, visualizar gráficos de funções, tendo como objectivo, o complemento do nosso estudo de funções. Ele afirma que, aprender Matemática serve para adquirir conhecimentos que poderão ser usados mais tarde, no curso superior e, porventura, na nossa futura profissão. Ele considera que a Matemática é uma disciplina onde se aprende a fazer exercícios, sendo depois necessária uma reflexão posterior à sua aprendizagem. Filipe também considera que a

Matemática é uma disciplina onde se visualiza figuras geométricas e gráficos para depois as analisar.

Na sala de aula, não é necessário solicitar a participação do Filipe, porque ele é bastante interventivo e comunicativo no bom sentido. A sua participação é quase sempre oportuna e as questões colocadas são, na maioria das vezes, bastante pertinentes. É um aluno empenhado, atento, interessado e trabalhador, resolvendo todos os trabalhos de casa propostos. Muitas são as vezes em que o Filipe apresenta processos de resolução dos trabalhos propostos que surpreendem, no sentido de serem bastante originais e com uma grande coerência lógica.

6.1 – Reconhecimento do conceito de função

Na questão 1 da tarefa da entrevista (nesta questão, é pedido ao aluno para identificar quais das seguintes representações – Tabela, gráficos e expressões algébricas, são funções), Filipe define função de uma forma correcta, reconhecendo em todas as situações apresentadas as representações que são funções, à excepção da representação algébrica enunciada na questão 1.5. Na questão 1.1, o aluno refere que a representação na tabela não corresponde a uma função, porque, pela definição de função, a cada objecto corresponde uma e uma só imagem, dando como exemplo o objecto –6, que tem duas imagens, –15 e 15, o que contradiz a definição de função. Na questão 1.2, o aluno refere que a representação gráfica corresponde a uma função, justificando que, se fizermos o teste da recta vertical, observamos que esta só intersecta a representação gráfica num único ponto. Na questão 1.3, o aluno reconhece que a representação gráfica não corresponde a uma função, porque, se traçarmos uma recta vertical, intersectamos a representação gráfica em dois pontos, ou seja, existem objectos, aos quais correspondem duas imagens, o que contradiz a definição de função. Na questão 1.5, Filipe não consegue afirmar se aquela equação corresponde a uma função. Analisemos o seguinte diálogo extraído da entrevista:

> Professor: É função?
> Filipe: Não sei!
> Professor: Essa é uma equação que tu já conheces.
> Filipe: …

Professor: É uma equação cartesiana de um lugar geométrico.
Filipe: …
Professor: Quais são as características comuns dos pontos que constituem o lugar geométrico, representado algebricamente por essa equação cartesiana?
Filipe: Já sei! É a equação de uma circunferência.
Professor: Qual é o centro?
Filipe: É o ponto (0, 0).
Professor: E o raio?
Filipe: O raio tem que estar ao quadrado e aparece-me aqui o 9.
Professor: Então, qual é o raio? Já disseste tudo!
Filipe: É 3.
Professor: É função?
Filipe: Não sei.
Professor: Representa graficamente a circunferência e depois, responde-me se é função!
Filipe: Não é função, porque existem objectos com mais do que uma imagem. Por exemplo, $x = 0$ tem as imagens –3 e 3.

No entanto, após eu lhe perguntar, quais são as características comuns dos pontos que constituem o lugar geométrico, representado algebricamente por aquela equação cartesiana, ele identifica-a como sendo a equação cartesiana de uma circunferência, com centro no ponto de coordenadas (0, 0) e raio 3. Depois, quando eu lhe pergunto outra vez, se aquela equação corresponde a uma função, ele volta a responder-me que não sabe. Como consequência da sua resposta, eu sugiro-lhe que represente geometricamente a circunferência na folha de respostas, para, depois, me dar uma resposta concreta. Deste modo, o aluno dá-me uma resposta fundamentada na definição de função, "existem objectos com mais do que uma imagem", acompanhada de um exemplo, " ao objecto $x = 0$ correspondem as imagens $y = –3$ e $y = 3$".

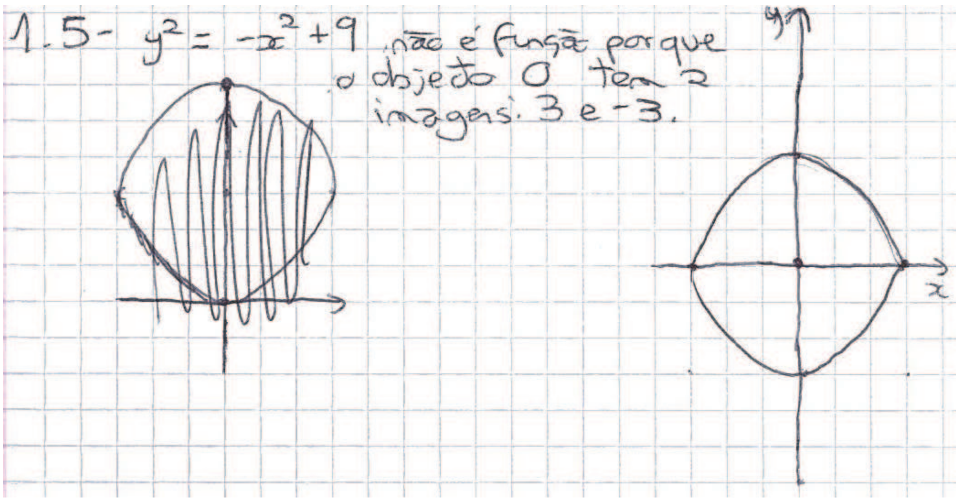


Figura 6.1 – Resolução da questão 1.5 (tarefa da entrevista; 27/Maio/2010)

Tal como Daniel, o desempenho de Filipe nesta questão é bom, uma vez que, não revela dificuldades em identificar uma função, quer na sua representação gráfica, quer na sua representação em tabela. O aluno apenas revelou dificuldades na identificação de funções representadas na sua forma algébrica, ao não conseguir reconhecer a equação cartesiana de uma circunferência no plano. Desta forma, Filipe escreve correctamente a definição de função e identifica as representações gráficas e, em tabelas que são funções. No entanto, apresenta algumas dificuldades em identificar determinadas representações algébricas que são funções.

6.2 – Representação gráfica de uma função visualizada no ecrã da calculadora

Na questão 2 da tarefa da entrevista (nesta questão, é pedido ao aluno que transcreva para a folha de respostas a representação gráfica de uma função definida por ramos, visualizada no ecrã da calculadora gráfica, que identifique algumas das suas propriedades e escreva os parâmetros da janela de visualização do gráfico), Filipe apresenta uma representação gráfica da função *g* definida por ramos, sendo um dos ramos a restrição de uma função afim e o outro ramo a restrição de uma função quadrática. Ele considera algumas propriedades importantes, tais como, o domínio, o contradomínio e os zeros da função, efectuando uma representação gráfica correcta da função *g*, onde se evidencia a “bola” aberta para $x < 0$ e a “bola” fechada para $x \geq 0$. O único aspecto menos bom que se observa na representação gráfica, efectuada pelo Filipe, foi o da falta de rigor na representação geométrica da semi-recta, ao não respeitar o seu declive.

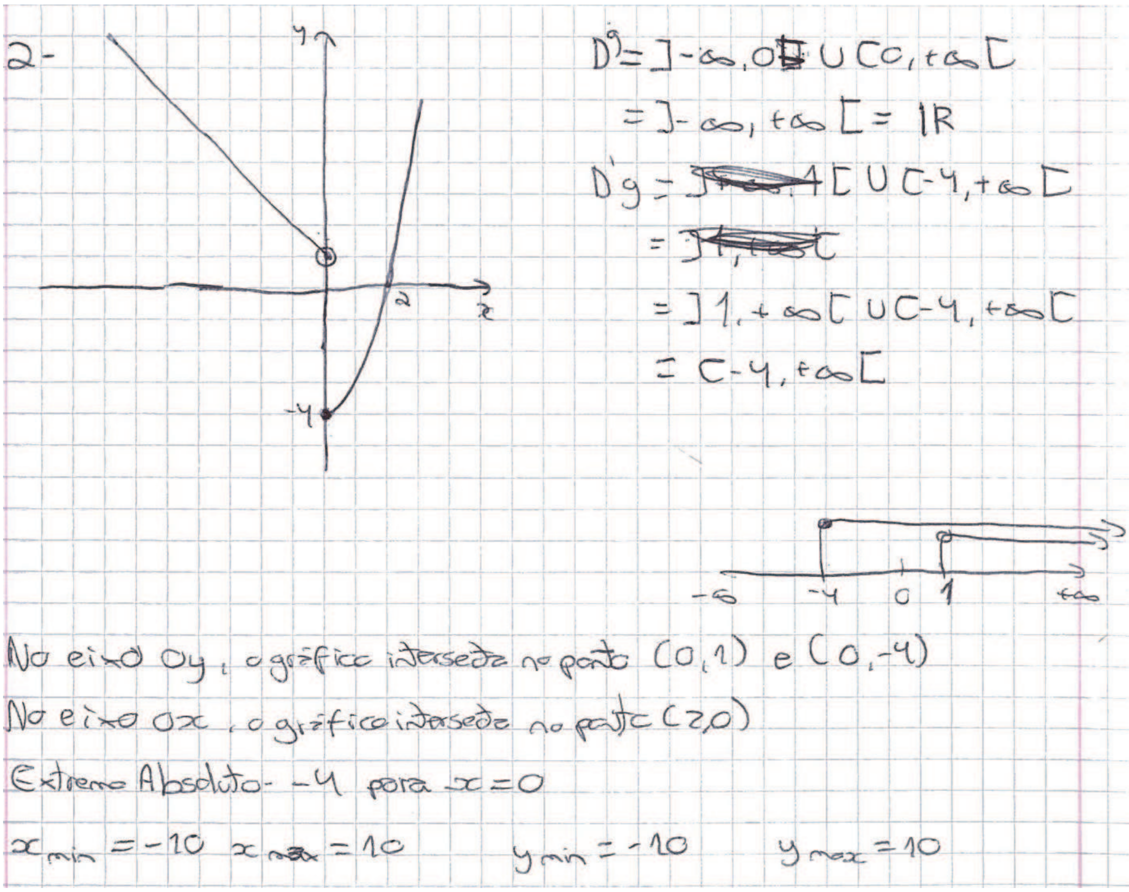


Figura 6.2 – Resolução da questão 2 (tarefa da entrevista)

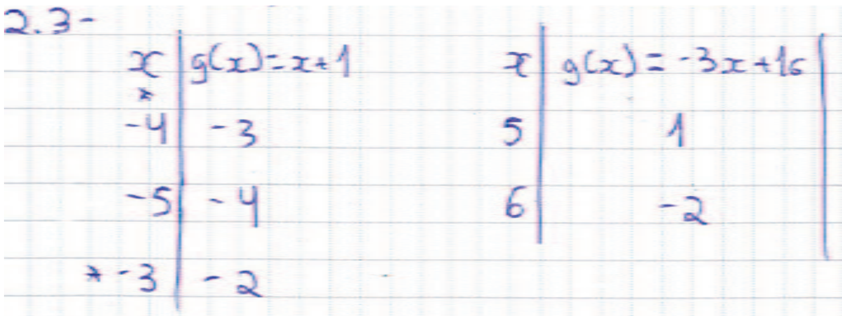


Figura 6.3.1 – Resolução da questão 2.3 (teste de 12/Março/2010)

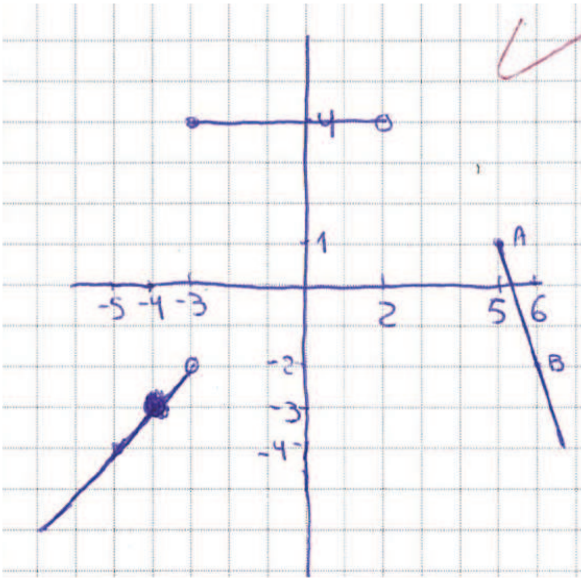


Figura 6.3.2 – Continuação da resolução da questão 2.3 (teste de 12/Março/2010)

Foi pedido ao aluno, durante a entrevista, para descrever todo o processo utilizado na resolução do exercício, que envolveu a utilização da calculadora. Analisemos esse mesmo diálogo retirado da entrevista:

Professor: Que tipo de função é esta?
Filipe: É uma função definida por ramos.
Professor: Descreve-me como resolveste este exercício na calculadora.
Filipe: Inseri cada um dos ramos na calculadora em Y_1 *e* Y_2. Sei que o ramo $-3x+1$ é uma função afim, e o seu gráfico é uma recta. Intersecto o eixo Oy no ponto (0, 1), porque o seu termo independente é 1, que é também a ordenada na origem.

Representação algébrica dos ramos da função na calculadora gráfica:

$$\boxed{\begin{array}{l} Y_1 = (-3x+1)\ \ /\ (x<0) \\ Y_2 = (x^2-4)\ \ /\ (x \geq 0) \end{array}}$$

Continuação do diálogo:

Filipe: O outro ramo representa graficamente uma função quadrática. É só a parte direita do gráfico, porque os valores estão entre zero e $+\infty$.
Professor: Quais são as intersecções entre o gráfico da restrição da função quadrática e os eixos coordenados?
Filipe: No eixo *Oy*, o gráfico intersecta o ponto (0, –4), pela mesma razão que a outra [*–3x + 1*]. – 4 é o termo independente.

Professor: E em relação ao eixo *Ox*?
Filipe: O gráfico intersecta o eixo *Ox* no ponto (2, 0). Se igualarmos a zero, teremos duas soluções, –2 e 2, mas, como o *x* só pode ser maior ou igual a zero, só há uma solução possível, $x = 2$.
Professor: E o domínio? Onde se vê o domínio da função *g*, no gráfico?
Filipe: No eixo *Ox*.
Professor: Qual é o domínio?
Filipe: Eu costumo fazer por partes, porque, às vezes, as funções definidas por ramos têm "buracos".
Professor: Então, faz como costumas fazer!
Filipe: $]-\infty, 0[\ \cup\ [0, +\infty[$ é igual a $]-\infty, +\infty[$;
é R (conjunto dos números reais).
Professor: Qual é o contradomínio?
Filipe: Faço primeiro a recta de cima. O intervalo $]1, +\infty[$ reunião com parte da parábola, $[-4, +\infty[$, e agora, vou ver na recta real.
É de –4 a $+\infty$.

$$D'_g = [-4, +\infty[$$

A entrevista permite saber que o Filipe conhece as propriedades de uma função definida por ramos, sendo um dos ramos a restrição de uma função afim e o outro ramo, a restrição de uma função quadrática. Deste modo, verifica-se que o aluno transcreve a representação gráfica do ecrã da calculadora para a folha de respostas, tendo em conta algumas das propriedades, como é o caso dos pontos com "bola" aberta e "bola" fechada, pontos esses, não evidenciados pela calculadora gráfica. Filipe apenas falha na representação geométrica da semi-recta, por não respeitar o seu declive.

O aluno revela que conhece e é capaz de identificar as propriedades de uma função, recorrendo à sua representação gráfica visualizada no ecrã da calculadora. Tal como Daniel, Filipe também revelou conseguir inserir na calculadora uma função definida por ramos, inserindo em primeiro lugar a expressão correspondente à semi-recta e, em segundo lugar, a expressão correspondente à representação gráfica parcial da parábola.

6.3 – Tradução de uma representação gráfica numa representação algébrica

Na questão 3.2 (nesta questão, é pedido ao aluno que escreva uma expressão algébrica que represente a função quadrática *f*, cuja representação gráfica é dada no enunciado), Filipe escreve a equação na forma $y = a(x-h)^2 + k,\ a \neq 0$, e substitui os parâmetros h e k pelas coordenadas do vértice da parábola. Determina o parâmetro a, através da resolução da equação $y = a(x-1)^2$, após a substituição de x e de y pelas respectivas abcissa e ordenada de um ponto do gráfico diferente do vértice da parábola.

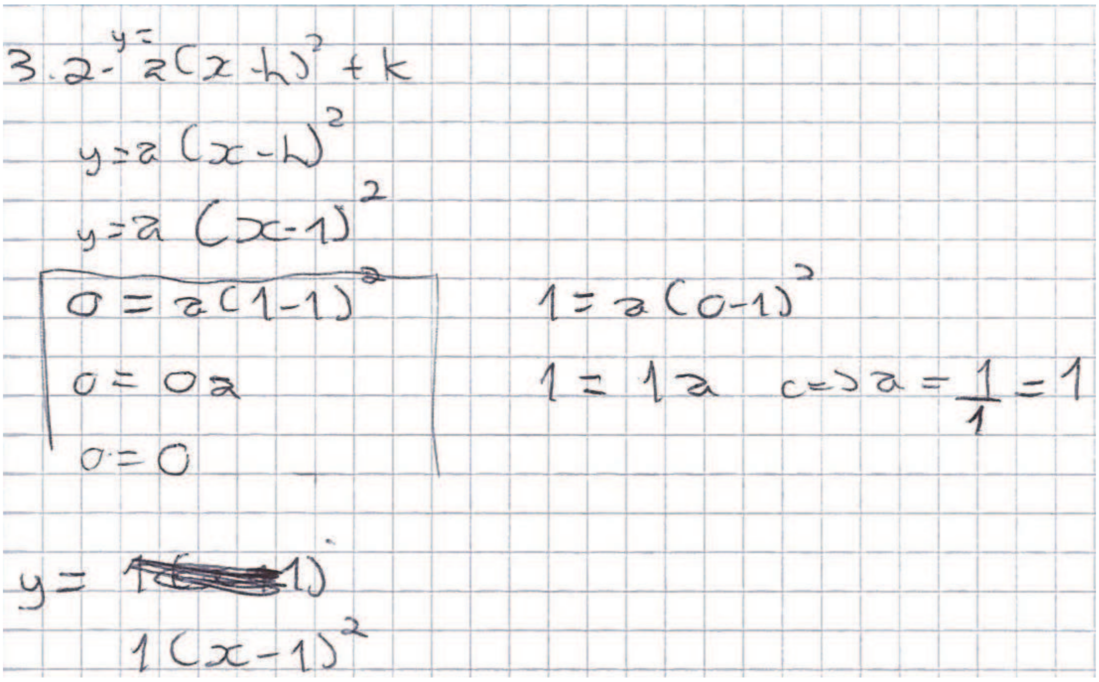


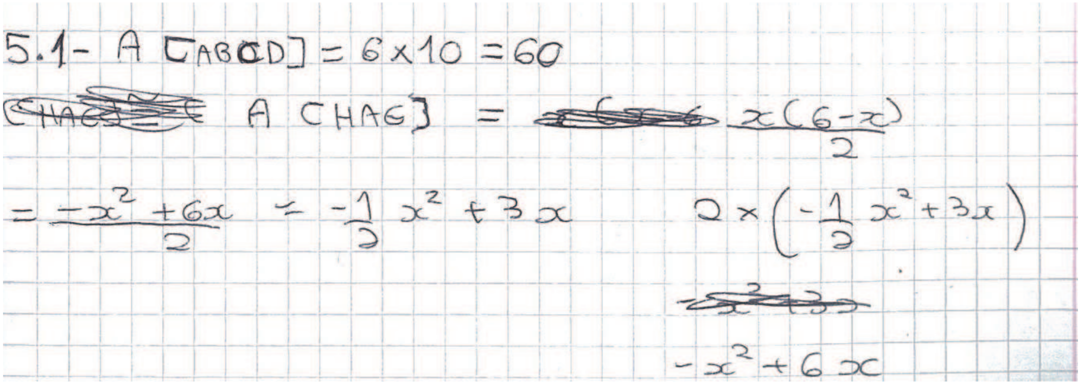
Figura 6.4 – Resolução da questão 3.2 (tarefa da entrevista)

Filipe substitui correctamente os parâmetros h e k, e determina também o valor de a, apesar de, inicialmente, substituir x e y pelas coordenadas do vértice, (1, 0), que resulta numa proposição verdadeira, 0 = 0, mas que não lhe dá o valor do parâmetro a. No entanto, o aluno, ao deparar-se com este resultado, volta a escolher outro ponto, desta vez, diferente do vértice e obtém o valor de a (a = 1). Deste modo, o aluno responde correctamente à questão e justifica a resposta, apresentando todos os cálculos.

6.4 – Tradução de uma representação numérica numa representação algébrica

Na questão 5.1 (nesta questão, é pedido ao aluno para mostrar que a área A do quadrilátero [EFGH], inscrito no rectângulo [ABCD], é dada em função de x pela expressão: $A(x) = 2x^2 - 16x + 60$), Filipe calcula correctamente a área do rectângulo [ABCD] e as áreas dos triângulos rectângulos [HAE] e [EBF]. Depois, compreende que a área do quadrilátero [EFGH] é igual à diferença entre a área do rectângulo [ABCD] e a soma das áreas dos quatro triângulos rectângulos. Assim, podemos concluir que Filipe faz uma interpretação correcta do problema, convertendo-o numa representação algébrica.

Nas figuras seguintes, podemos observar como o aluno resolveu, faltando-lhe, no entanto, algum rigor na indicação do cálculo da soma das áreas dos dois triângulos rectângulos [HAE] e [FCG] e da soma das áreas dos dois triângulos rectângulos [EBF] e [GDH], uma vez que ele não as escreve sob a forma de expressões algébricas.



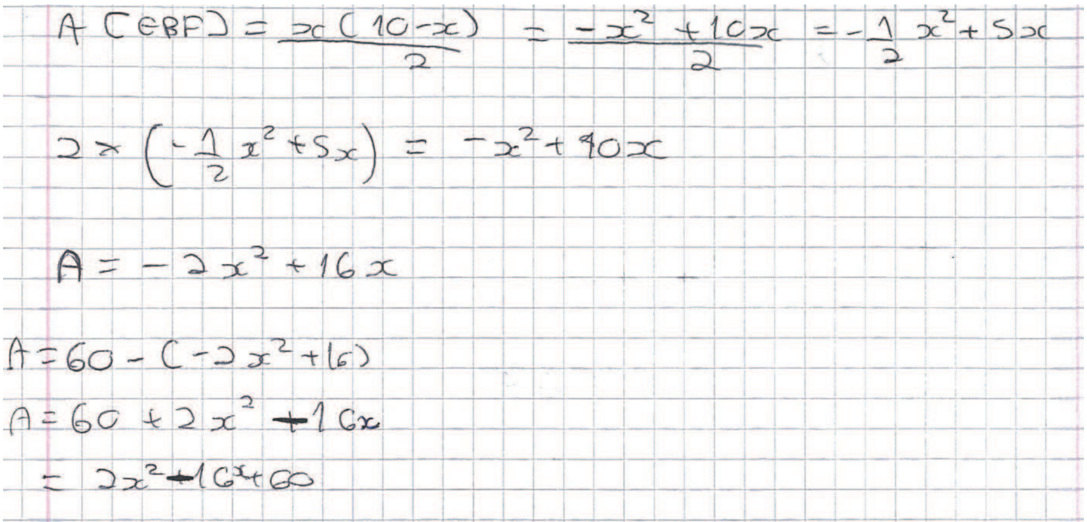
5.1- $A\,[ABCD] = 6 \times 10 = 60$

$A\,[HAG] = \dfrac{x(6-x)}{2}$

$= \dfrac{-x^2+6x}{2} = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3x \qquad 2 \times \left(-\dfrac{1}{2}x^2 + 3x\right)$

$-x^2 + 6x$

Figura 6.5.1 – Resolução da questão 5.1 (tarefa da entrevista)



$A\,[EBF] = \dfrac{x(10-x)}{2} = \dfrac{-x^2+10x}{2} = -\dfrac{1}{2}x^2 + 5x$

$2 \times \left(-\dfrac{1}{2}x^2 + 5x\right) = -x^2 + 10x$

$A = -2x^2 + 16x$

$A = 60 - (-2x^2 + 16)$

$A = 60 + 2x^2 - 16x$

$= 2x^2 - 16x + 60$

Figura 6.5.2 – Continuação da resolução da questão 5.1 (tarefa da entrevista)

Analisemos o seguinte diálogo extraído da entrevista:

> Professor: Por exemplo, porque é que as áreas dos triângulos [GCF] e [AEH] são iguais?
> Filipe: Porque [AH] é igual a [CF], [AE] é igual a [GC] e [EH] é igual a [FG].
> Professor: São iguais..., bem, aquilo que tu queres dizer é que têm o mesmo comprimento, certo?

Filipe: Sim, é isso!
Professor: Ou seja, em rigor matemático, o que é que isso significa?
Filipe: Não sei.
Professor: Significa que esses segmentos de recta são geometricamente iguais e, pelo critério da igualdade de triângulos, LLL, os triângulos [GCF] e [AEH] são geometricamente iguais, ou congruentes.

Neste diálogo, constata-se que Filipe sabe justificar o porquê de dois triângulos serem geometricamente iguais, mas não se recorda dos critérios de igualdade de triângulos, como por exemplo, o critério LLL. É importante realçar que, tanto Ana como Daniel e Filipe, não justificaram a igualdade das áreas dos triângulos [HAE] e [FCG], assim como, das áreas dos triângulos [EBF] e [GDH], por um dos critérios de igualdade de triângulos.

6.5 – Opção por processos algébricos na resolução de problemas

Na questão 4.1 da tarefa da entrevista (nesta questão, é pedido ao aluno para determinar o número de pessoas que se encontra no recinto, às 17 horas; o enunciado do problema diz-nos que o número de pessoas no recinto de um festival rock em Lisboa, entre as 16h e as 24h, varia em função de t e pode ser dado aproximadamente por $N(t) = -2\, t^2 + 8\, t + 24$, sendo N o número de pessoas em **milhares** e t dado em **horas**, correspondendo $t = 0$ às 18 h), Filipe adopta uma resolução algébrica. Interpreta correctamente o valor a atribuir à variável tempo t, ao considerar que, às 17 horas, esse valor é igual a -1. Calcula correctamente o valor de $N(-1)$ e não se esquece de apresentar a resposta em milhares.

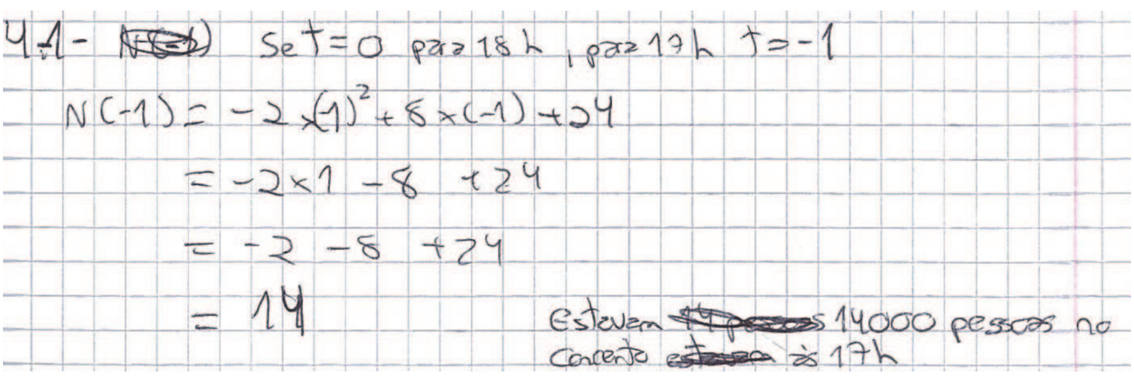


Figura 6.6 – Resolução da questão 4.1 (tarefa da entrevista)

Na questão 4.2 (nesta questão, é pedido ao aluno que calcule $N(2) - N(1)$ e interprete o resultado no contexto do problema), Filipe também calcula por processos algébricos os valores de *N(1)* e *N(2)*, efectua a diferença entre estes dois valores e interpreta correctamente o resultado obtido, no contexto do problema.

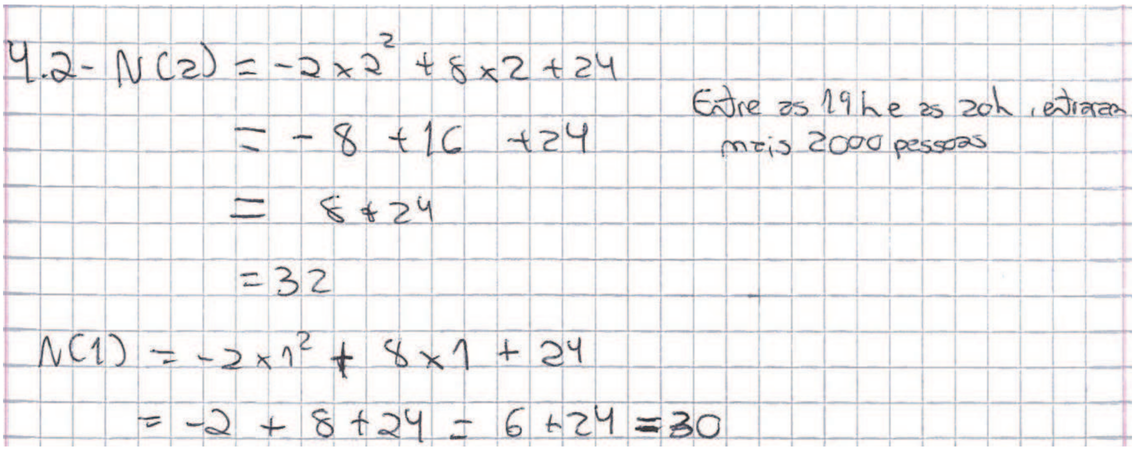


Figura 6.7 – Resolução da questão 4.2 (tarefa da entrevista)

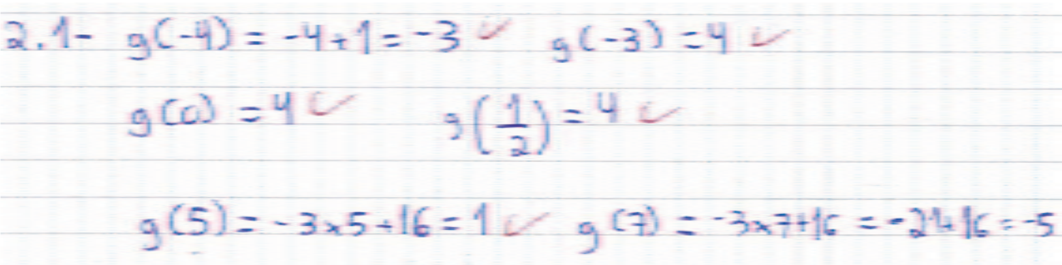


Figura 6.8 – Resolução da questão 2.1 (teste de 12/Março/2010)

Na questão 4.3 da tarefa da entrevista (nesta questão, é pedido ao aluno que determine entre que horas o número de pessoas ultrapassou as 25000 pessoas, dando o resultado aproximado ao minuto), Filipe opta pela resolução algébrica, mas não apresenta nos seus processos de resolução, ao contrário da Ana e do Daniel, a identificação da variação do sinal da função quadrática, sob a forma de esboço do gráfico da parábola a intersectar o eixo *Ox*.

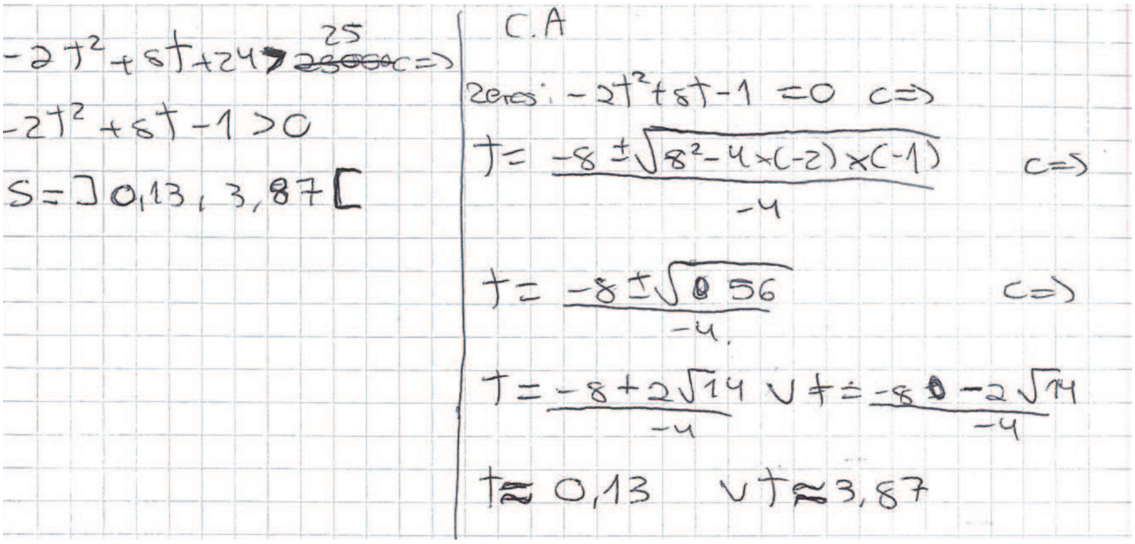


Figura 6.9.1 – Resolução da questão 4.3 (tarefa da entrevista)

No entanto, Filipe evidenciou dificuldades na interpretação do valor 3,87 e na sua respectiva tradução em minutos, como se pode observar no seguinte diálogo retirado da entrevista:

> Professor: A que horas corresponde t = 3,87 ?
> Filipe: Tenho que aplicar uma regra de três simples e passar 3,87 a minutos.

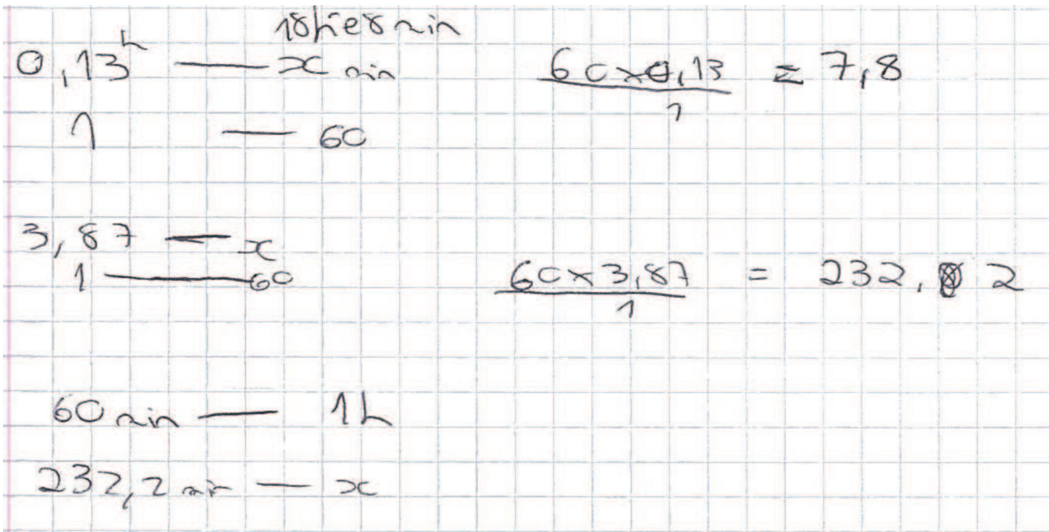


Figura 6.9.2 – Resolução da questão 4.3 (tarefa da entrevista)

> Professor: Não está certo. t = 0 corresponde a que horas?
> Filipe: Às 18 horas.
> Professor: E t = 1 ?
> Filipe: Às 19 horas.
> Professor: E t = 2 ?
> Filipe: Às 20 horas.
> Professor: E t = 3 ?

Filipe: Às 21 horas.
Professor: E $t = 4$?
Filipe: Às 22 horas.
Professor: Então, $t = 3{,}87$ corresponde a que horas?
Filipe: Então, $t = 3{,}87$ está entre as 21 horas e as 22 horas.
Professor: Certo! 0,87 são centésimas da hora e, por isso, tens que as converter em minutos.

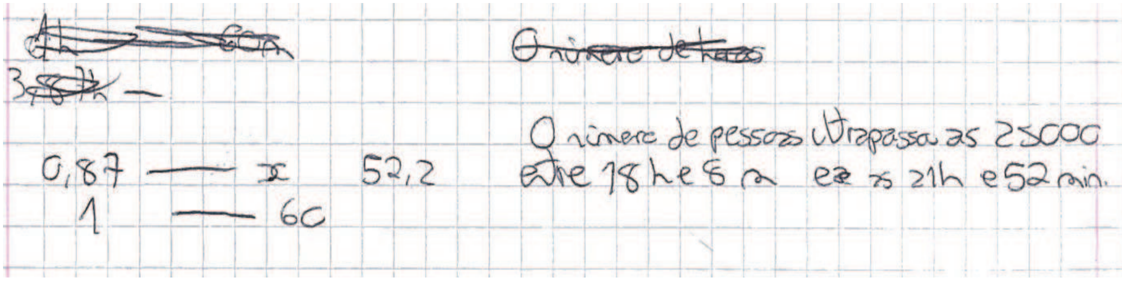


Figura 6.9.3 – Resolução da questão 4.3 (tarefa da entrevista)

Na questão 5.2 (nesta questão, é pedido ao aluno que determine, para que valores de x, a área A é inferior ou igual a 46 cm^2; através da questão 5.1, a expressão analítica da área A do quadrilátero [EFGH], dada em função de x, é conhecida, sendo $A(x) = 2x^2 - 16x + 60$), Filipe determina correctamente as raízes da equação $2x^2 - 16x + 14 = 0$, situa o gráfico em relação ao eixo Ox e identifica correctamente a variação do sinal da função.

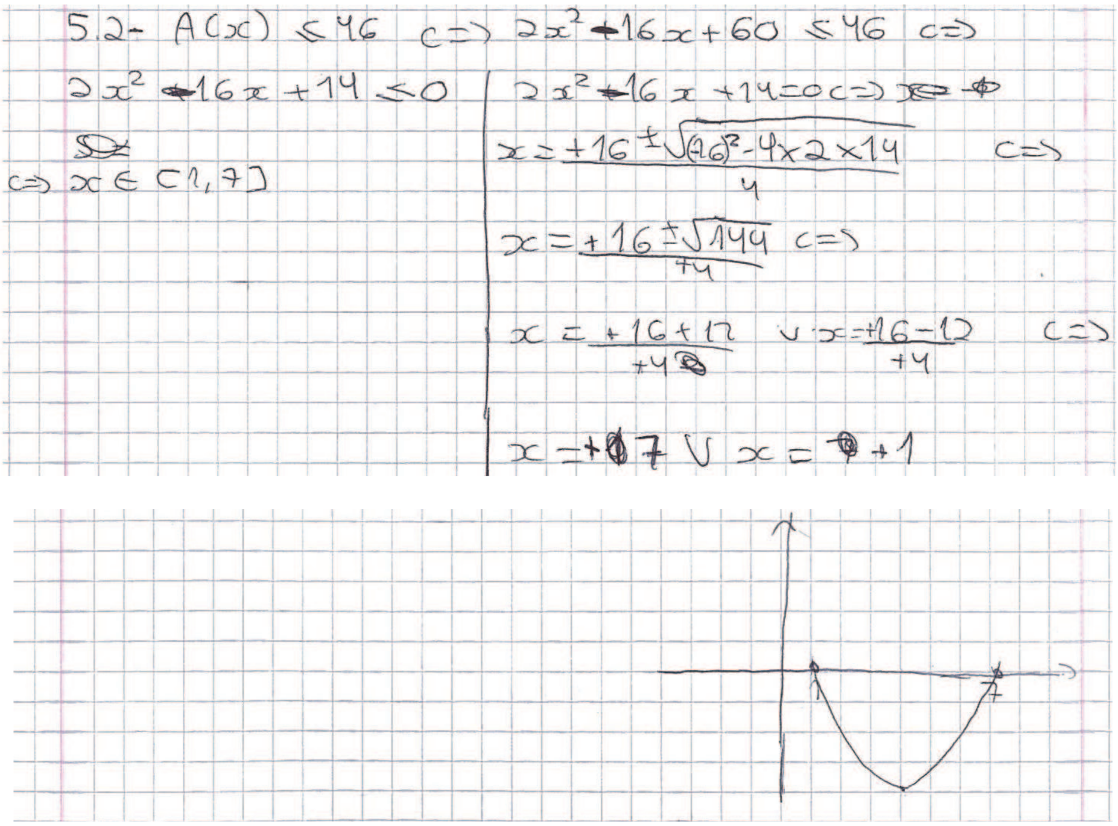


Figura 6.10 – Resolução da questão 5.2 (tarefa da entrevista)

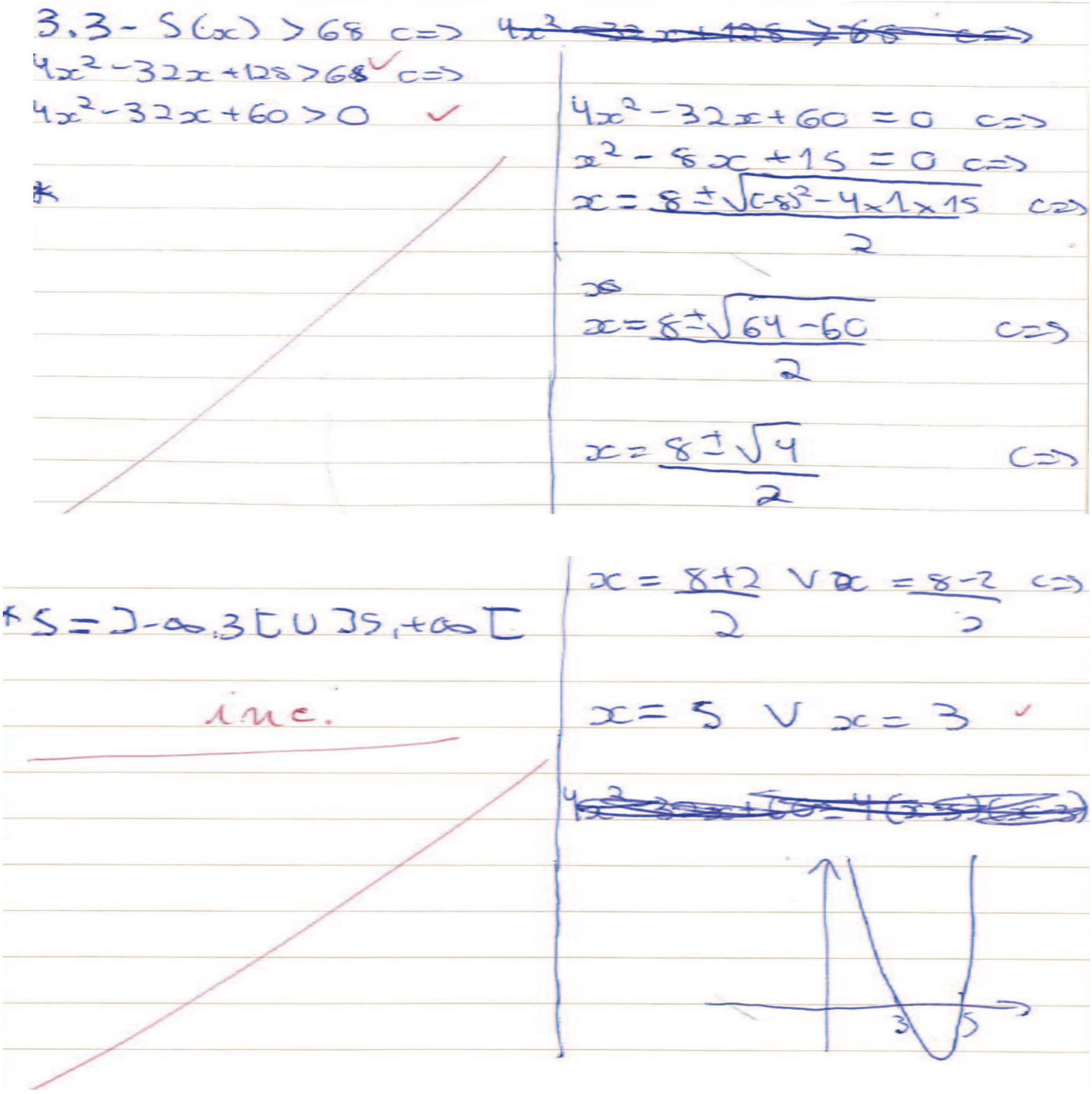


Figura 6.11 – Resolução da questão 3.3 (versão 2 do teste intermédio de 5/Maio/2010)

O aluno mostra ter preferência pela resolução algébrica. Filipe revela uma bom desempenho ao nível do cálculo de expressões e de resolução de inequações do 2.º grau, embora não seja rigoroso na escrita matemática, não escrevendo correctamente as expressões analíticas das funções, e, tendo pouco cuidado na forma como apresenta as suas resoluções na folha de respostas.

6.6 – Opção por processos gráficos na resolução de condições

Na questão 3.1 da tarefa da entrevista (nesta questão, é pedido ao aluno que determine o conjunto solução da inequação $g(x) \geq 0$, sabendo que $g(x) = -f(x) + 1$; a representação gráfica da função quadrática f é dada no enunciado), Filipe opta pela resolução gráfica na determinação do conjunto solução da inequação, que implica a representação gráfica da função g e a interpretação correcta da variação do sinal dessa função (figura 6.12 – Resolução da questão 3.1). O aluno obtém a representação gráfica da função g, através da transformação de funções. A função $-f$ tem o gráfico simétrico ao gráfico de f, em relação ao eixo Ox, passando-se do gráfico de $-f$ ao gráfico de g, por meio de uma translação vertical associada ao vector $\vec{u}$ de coordenadas (0, 1).

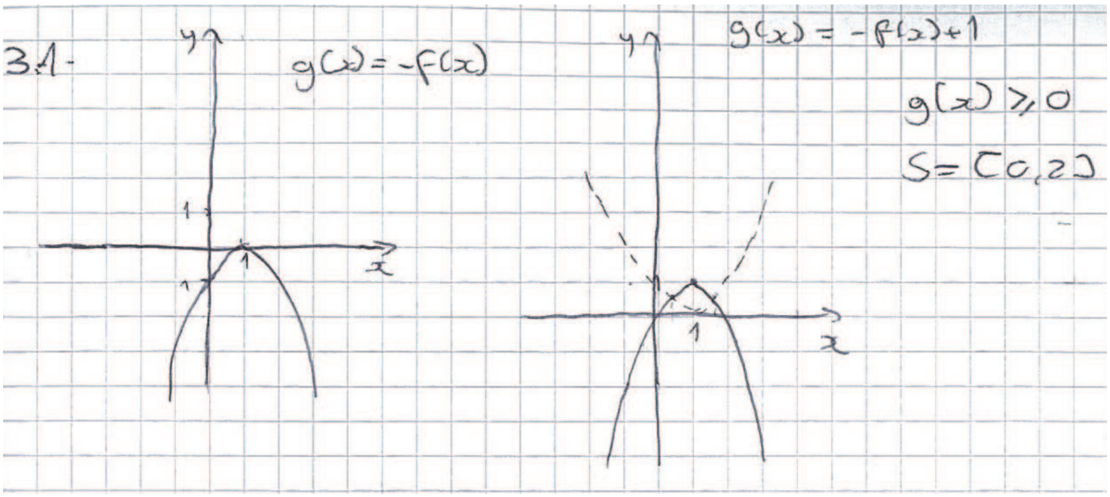


Figura 6.12 – Resolução da questão 3.1 (tarefa da entrevista)

A entrevista permite perceber como é que o Filipe constrói gradualmente a representação gráfica da função g, e determina o conjunto solução da inequação $g(x) \geq 0$:

> Filipe: Tenho que desenhar o gráfico da função g, já com a transformação da função f. $f(x)$ é a imagem de f. Basta multiplicar as imagens de f por –1.
> Professor: Observando o gráfico, conheces quantos pontos?
> Filipe: (0, –1) e (1, 0).
> Professor: Descreve-me o teu processo de resolução.
> Filipe: Primeiro, fiz $-f(x)$ e o seu gráfico é uma simetria em relação ao eixo Ox.
> Professor. Gráfico de quê?
> Filipe: Da função $-f(x)$.
> Professor: Da função $-f$. $-f(x)$ são as imagens. E depois?
> Filipe: Fiz uma translação do gráfico associada ao vector (0, 1). Todas as imagens vão subir uma unidade.
> Professor: Qual é o conjunto solução da inequação $g(x) \geq 0$?
> Filipe: Vendo o gráfico de g, é o intervalo entre os zeros.

Observa-se um bom desempenho do Filipe na determinação do conjunto solução da inequação, ao recorrer à transformação de funções.

Analisemos o seguinte diálogo, retirado da entrevista, e directamente relacionado com a questão 5.2 da tarefa da entrevista:

> Professor: Descreve-me como poderias resolver este problema, usando a calculadora.
> Filipe: Colocava $A(x) = 2x^2 - 16x + 60$ igual a Y_1, e Y_2 igual a 46.
>
> $$\boxed{\begin{array}{l} Y_1 = 2x^2 - 16x + 60 \\ Y_2 = 46 \end{array}}$$
>
> Visualizamos os gráficos, escolhendo uma janela que permita ver os dois gráficos.
> Fazemos a intersecção entre a parábola e a recta, $y = 46$.
> Intersectam-se em (1, 46) e (7, 46).
> Então, $A(x)$ é menor ou igual a 46 $(A(x) \leq 46)$, quando x pertence ao intervalo fechado de 1 a 7 $(x \in [1,7])$, ou seja, quando a parábola está abaixo da recta $y = 46$.

Depois de eu lhe sugerir para descrever um processo de resolução deste problema, recorrendo à calculadora, Filipe começa por referir que, em primeiro lugar, inseria na calculadora as expressões $Y_1 = 2x^2 - 16x + 60$ *e* $Y_2 = 46$ e, depois, efectuaria os respectivos gráficos. Para visualizar correctamente os dois gráficos, realizados em simultâneo, teria que escolher uma janela adequada. De seguida, determinaria os pontos de intersecção entre a parábola e a recta de equação $y = 46$ (neste caso, os pontos de coordenadas (1, 46) e (7, 46) são os pretendidos). Finalmente, o aluno apresenta a solução correcta da inequação, afirmando que $A(x) \leq 46$ quando $x \in [1,7]$. Deste modo, podemos concluir que Filipe faz uma interpretação correcta do problema e adopta uma estratégia adequada que envolve processos gráficos na resolução da inequação $A(x) \leq 46$, apresentando a sua solução correcta.

6.7 – Síntese

1. *Compreensão do conceito de função em diversas representações*

Na questão 1, Filipe define correctamente o conceito de função e reconhece várias representações que são funções, justificando quase sempre as suas respostas de uma forma satisfatória. A única excepção foi a questão 1.5, na qual, o aluno não foi capaz de afirmar que a expressão algébrica $x^2 + y^2 = 9$ não corresponde a uma função, uma vez que, não conseguiu identificá-la como sendo a equação cartesiana de uma circunferência. No entanto, o seu desempenho nesta questão é bom, pois, o aluno identifica todas as funções na sua representação gráfica e na forma de tabela, e, das duas representações algébricas, só não identifica aquela que não é função, uma vez que corresponde à equação cartesiana de uma circunferência. As suas justificações são quase sempre correctas.

2. *Estudo de propriedades de funções em diversas representações*

Na tradução da representação gráfica de uma função quadrática para a representação algébrica, Filipe utiliza facilmente a informação disponível, através da representação gráfica da função. Por exemplo, na questão 3.2, Filipe apresenta uma equação correcta do tipo $y = a(x-h)^2 + k,\ com\ a \neq 0$, identificando correctamente as coordenadas do vértice da parábola, *(h, k)*, e as coordenadas de um outro ponto na representação gráfica da função, *(x, y)*, tendo como objectivo determinar o parâmetro *a*, efectuando para o efeito todas as substituições necessárias na equação $y = a(x-h)^2 + k,\ a \neq 0$. O aluno determina correctamente o parâmetro *a*, *a* = 1, e dá a resposta certa à questão, justificando-a com a apresentação de todos os cálculos.

Relativamente à interpretação dos dados da representação gráfica visualizada no ecrã da calculadora, Filipe identifica a generalidade das propriedades de uma função definida por ramos (restrição de uma função afim e restrição de uma função quadrática). Por exemplo, na questão 2, o aluno considera uma janela de visualização adequada, para a representação gráfica da função efectuada na calculadora e reconhece algumas propriedades da função, tais como, o domínio, o contradomínio e os zeros. Filipe efectua uma representação gráfica correcta da função *g*, onde se evidencia a "bola" aberta para $x < 0$ e a "bola" fechada para $x \geq 0$. O único aspecto que mostra alguma falta de rigor foi o de não ter respeitado o declive da semi-recta na representação gráfica da função *g*, efectuada na folha de respostas. Deste modo, Filipe revelou-se conhecedor e capaz de identificar as propriedades de uma função, recorrendo à sua representação gráfica visualizada na calculadora.

Em suma, Filipe identifica as propriedades de uma função, através das representações gráfica e algébrica, sendo este um facto revelador de que o aluno adquiriu competências durante a aprendizagem de algumas propriedades da função afim e da função quadrática.

3. Representações e processos utilizados em problemas matemáticos

Filipe opta por processos algébricos na resolução de problemas matemáticos. Por exemplo, na questão 5.2, o aluno, tal como Ana, resolve a inequação do 2.º grau, através de processos algébricos e faz um esboço do gráfico em relação ao eixo *Ox*, para identificar a variação do sinal da função, e assim, determinar o conjunto solução do problema. No entanto, quando lhe pedi para descrever um processo de resolução desta questão, recorrendo à calculadora, Filipe interpreta correctamente o problema e adopta uma estratégia adequada que envolve processos gráficos na resolução da inequação $A(x) \leq 46$. Primeiro, ele começa por dizer que inseria na calculadora as expressões $Y_1 = 2x^2 - 16x + 60$ e $Y_2 = 46$, efectuando os seus gráficos. Depois de visualizar simultaneamente, no ecrã da calculadora, os dois gráficos, após um ajuste adequado da janela de visualização, determinaria os pontos de intersecção entre a parábola e a recta, estando, neste momento, em condições de determinar a solução correcta da inequação. A facilidade demonstrada pelo Filipe, quer adoptando processos algébricos, quer adoptando processos gráficos, é reveladora de que o aluno conhece bem as propriedades da função quadrática, que lhe permitem traduzir uma representação gráfica numa representação algébrica, nomeadamente, o facto de ser capaz de reconhecer o valor do parâmetro *a* e a sua influência no gráfico das funções quadráticas apresentadas, associando o sentido da concavidade da parábola ao valor do parâmetro *a*, assim como, na determinação do seu valor, baseada na escolha de um ponto possível do gráfico, diferente do seu vértice.

Quando a função é representada graficamente, o aluno recorre à transformação de funções, resolvendo inequações através de processos gráficos. Na questão 3.1, o aluno evidencia grande facilidade em representar graficamente a função *g*, em dois passos. No primeiro passo, obtém o gráfico de *–f*, através de uma simetria axial, em relação ao eixo *Ox*, do gráfico de *f*. No segundo passo, obtém o gráfico de *g*, através de uma translação vertical do gráfico de *–f*, associada ao vector $\vec{u}$ de coordenadas (0, 1).

Na tradução de uma representação numérica para uma representação algébrica, Filipe usa processos algébricos. Por exemplo, na questão 5.1, Filipe interpreta correctamente o problema, adoptando uma estratégia de resolução adequada, que consiste em obter a expressão analítica da área do quadrilátero [EFGH], através da subtracção da soma das áreas dos quatro triângulos rectângulos à área do rectângulo [ABCD].

Filipe mostra preferência por processos algébricos na resolução de problemas matemáticos, e que, só resolve um problema matemático, escolhendo processos gráficos, por sua iniciativa, se os dados do problema conduzirem à transformação de funções. No entanto, como ficou demonstrado anteriormente, Filipe tem a capacidade para resolver problemas matemáticos, através de processos gráficos, usando para o efeito a calculadora gráfica, e, apresentando respostas justificadas correctamente, que têm como base estratégias de resolução adequadas e bem estruturadas.

4. Representações e processos utilizados em problemas da semi-realidade.

Filipe, tal como Ana e Daniel, opta por processos algébricos na resolução de problemas da semi-realidade, revelando um bom desempenho no cálculo de expressões e de inequações do 2.º grau. Por exemplo, nas questões 4.1 e 4.2, Filipe resolve algebricamente, calculando e interpretando correctamente o valor das expressões. Na questão 4.3, o aluno resolve a inequação do 2.º grau, através de processos algébricos e consegue determinar a solução do problema, embora tenha apresentado algumas dificuldades em dar o resultado aproximado ao minuto.

Tal como nos problemas matemáticos, Filipe revela preferência por processos algébricos na resolução de problemas da semi-realidade. No entanto, ele usa frequentemente a calculadora na realização de cálculos e na confirmação de resultados.

Capítulo 7

Conclusão

7.1 – Síntese do estudo

Este estudo tem como objectivo analisar os processos de raciocínio usados por alunos do 10.º ano de escolaridade na aprendizagem de funções, durante a resolução de tarefas de exploração e investigação, com recurso à utilização da calculadora gráfica. Deste objectivo, resultam as seguintes questões de investigação:

1. Como é que os alunos interpretam o conceito de função em diferentes representações (algébrica, gráfica, numérica e tabela)?
2. Qual a interpretação dos alunos sobre as propriedades das funções em diferentes representações? Em particular, quais os processos utilizados na passagem de uma representação para outra?
3. Quais as representações e processos utilizados pelos alunos na resolução de problemas matemáticos e em contexto de semi-realidade, com funções quadráticas?

A metodologia usada é de natureza qualitativa, tendo por base o paradigma interpretativo e descritivo, seguindo a modalidade de estudo de caso. Os participantes deste estudo são os três alunos seleccionados de uma turma do 10.º ano de escolaridade – Ana, Daniel e Filipe – os quais são objecto de análise em três estudos de caso. Para a recolha de dados utilizo os seguintes instrumentos:
(i) Entrevistas semi-estruturadas realizadas aos alunos objecto de estudos de caso;
(ii) Observação de aulas, preenchimento de dois questionários e análise das respostas dos alunos, dadas na realização da tarefa de investigação, dos testes de avaliação e das fichas de trabalho.

7.2 – Conclusões do estudo

As conclusões obtidas resultam de estudos de caso relativos aos alunos Ana, Daniel e Filipe. As entrevistas que lhes foram realizadas tiveram por base uma tarefa individual que envolvia problemas matemáticos e problemas da semi-realidade, inseridos no tema "Função quadrática".

Compreensão do conceito de função em diversas representações

Em relação a este item, verifica-se que Ana sabe a definição do conceito de função, reconhece as funções quando são representadas numa tabela, mas revela algumas dificuldades quando surgem na representação gráfica, ou na representação algébrica. Quanto ao Daniel e ao Filipe, verifica-se que também sabem a definição do conceito de função, reconhecem as funções quando são definidas na representação gráfica, ou, em tabela, mas nem sempre as identificam quando surgem na representação algébrica.

Assim, de acordo com os resultados obtidos, conclui-se que Ana, Daniel e Filipe revelam algumas dificuldades na compreensão do conceito de função em diferentes representações. Os alunos conhecem a definição formal de função, dado que descrevem função como uma correspondência unívoca entre o conjunto dos objectos e o conjunto das imagens, mas, quando lhes é pedido para identificarem as representações que são funções, nem sempre são capazes, ou porque desconhecem o modo de representação da função, ou não conseguem utilizar a informação disponível na representação dada, mostrando possuírem um conhecimento fragmentado relativamente ao conceito de função, sem interligação entre as possíveis representações de uma função.

Estudo de propriedades de funções em diversas representações

Na tradução da representação gráfica de uma função quadrática numa representação algébrica, Ana recorda-se que uma função quadrática *f* pode ser definida analiticamente por $f(x) = a(x-h)^2 + k,\ com\ \ a \neq 0$, mas revela dificuldades na determinação do parâmetro *a*, porque não consegue recolher informações dadas no enunciado, pela representação gráfica da função *f*, tais como, as coordenadas do vértice da parábola e de um outro ponto qualquer, também da parábola. Quanto ao Daniel, ele também apresenta uma equação correcta do tipo $y = a(x-h)^2 + k,\ com\ a \neq 0$ e consegue determinar o valor do parâmetro *a*, uma vez que, identifica correctamente as coordenadas do vértice da parábola e de um outro ponto qualquer, também da parábola, efectuando todas as substituições necessárias ao cálculo do parâmetro *a*, na equação anterior. No entanto, comete um erro de cálculo ao determinar o valor de *a*, trocando os sinais e dando assim uma resposta incorrecta à questão. Em relação ao Filipe, ele apresenta um processo algébrico de resolução idêntico ao do Daniel, determina o valor de *a* e responde correctamente à questão.

Relativamente à interpretação dos dados da representação gráfica visualizada no ecrã da calculadora, Ana, Daniel e Filipe identificam a generalidade das propriedades da função definida por ramos (restrição de uma função afim e restrição de uma função quadrática). Os alunos não apresentam com muito rigor o respectivo esboço gráfico, uma vez que, dos três, Ana é a única que respeita o declive da semi-recta e Filipe é o único que desenha, na sua representação gráfica da função *g*, a "bola" aberta para $x < 0$ e a "bola" fechada para $x \geq 0$. No entanto, revelam que conhecem e que são capazes de identificar as propriedades de uma função (domínios, zeros, contradomínio, extremos, etc.), através da sua representação gráfica visualizada no ecrã da calculadora. Igualmente, os alunos mostram que sabem definir uma janela adequada para a visualização do gráfico da calculadora.

Assim, conclui-se que Daniel e Filipe sabem identificar as propriedades de uma função na representação gráfica e que, geralmente são capazes de converter a representação gráfica de uma função quadrática numa representação algébrica, revelando, portanto, que as competências adquiridas na aprendizagem da função afim e da função quadrática estão interiorizadas. Ana também revela que conhece as propriedades de uma função definida pela sua representação gráfica. No entanto, quando é necessário converter a representação gráfica de uma função numa representação algébrica, não consegue avançar na resolução, porque não reconhece diversas propriedades, mostrando dificuldades na interpretação da representação gráfica de uma função.

Representações e processos utilizados em problemas matemáticos e em problemas da semi-realidade

Ana opta, principalmente, por processos algébricos na resolução de problemas matemáticos e da semi-realidade. Deste modo, utiliza processos algébricos na tradução da representação numérica de uma função na representação algébrica e, só escolhe processos gráficos, por exemplo, na resolução de inequações, se a função for representada nos dados fornecidos pelo enunciado do problema, através do seu gráfico, recorrendo, desta forma, à transformação de funções. Mesmo quando não consegue resolver uma questão algebricamente, ou até, para confirmar resultados, observa-se que a aluna recorre pouco à calculadora.

Daniel e Filipe também optam, geralmente, por processos algébricos na resolução de problemas matemáticos e da semi-realidade. Ambos os alunos utilizam processos algébricos na tradução da representação numérica de uma função na representação algébrica. Em relação à resolução de problemas matemáticos, os alunos Daniel e Filipe, tal como Ana, também optam por processos algébricos na resolução deste tipo de problemas, revelando um bom desempenho no cálculo de expressões e na resolução de inequações do 2.º grau. No entanto, ao contrário de Ana, recorrem frequentemente à calculadora, para efectuar cálculos, confirmar resultados e visualizar gráficos de funções, extraindo informações importantes para a identificação de algumas propriedades das funções.

Em relação ao Filipe, é importante referir que este aluno revelou, durante a entrevista, ter a capacidade para resolver problemas matemáticos, através de processos gráficos, usando para o efeito a calculadora gráfica, e, apresentando respostas justificadas correctamente, fruto da opção por estratégias de resolução adequadas e bem estruturadas.

7.3 – Reflexão

No estudo desenvolvido, notou-se que os alunos possuem conhecimentos sobre funções e conhecem algumas das suas representações. No entanto, revelam um conhecimento fragmentado, ao não conseguirem estabelecer ligações entre as várias representações das funções.

Segundo a teoria da reificação, de Anna Sfard, tanto para a Ana, como para o Daniel e para o Filipe, o conceito de função ainda se encontra em desenvolvimento. A concepção do conceito de função destes alunos é operacional, pois, grande parte dos conceitos são leccionados, no ensino secundário, como se se referissem a entidades matemáticas concebidas como um produto sequencial de determinados processos que é necessário efectuar, ou são identificadas com o próprio processo, contrariamente à concepção estrutural, em que as entidades matemáticas são concebidas como estruturas estáticas permanentes – como se fossem objectos reais, que existem algures no espaço e no tempo, que podem ser manipuladas de acordo com certas regras e combinadas com estruturas mais complexas. Esta opção de ensino pelo modelo de formação conceptual operacional deve-se ao facto de se reconhecer que, em termos didácticos, os novos conceitos não devem ser introduzidos aos alunos em termos estruturais, e a concepção estrutural não deve ser exigida enquanto não se tornar indispensável para os alunos.

Os alunos Ana, Daniel e Filipe encontram-se numa fase de desenvolvimento embrionária, relativamente ao conceito de função, uma vez que, estudaram poucas classes de funções e não resolveram muitos problemas de diversos tipos. Devido a este facto, não apresentaram flexibilidade na passagem de um sistema de representação para outro, uma vez que, estão pouco familiarizados com as várias representações possíveis das funções. Neste sentido, é muito importante inserir, nas metodologias e estratégias de ensino, a calculadora gráfica e as aplicações computacionais de Matemática, explorando as suas potencialidades, por exemplo, na tradução da representação algébrica de uma função para a sua representação gráfica, e também, no seu estudo, tendo em vista a identificação de algumas das suas propriedades.

Saber representar uma função de várias maneiras, assim como, saber passar de uma representação para outra, é essencial para determinar as soluções de inúmeros problemas. Um aluno que apresente uma maior flexibilidade na passagem de um sistema de representação para outro, tem, como é óbvio, uma maior probabilidade de sucesso na resolução de problemas, uma vez que, pode adoptar várias estratégias de resolução.

Referências bibliográficas

Bogdan, R. e Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics*, *17*(2), 125-141.

Carreira, S. (1992). *A aprendizagem da Trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de cálculo.* Tese de Mestrado. Universidade de Lisboa. Lisboa: APM.

Domingos, A. (1994). *A aprendizagem de funções num ambiente computacional com recurso a diferentes representações*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In David Tall (Org.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25–41). Dordrecht: Kluwer.

Fey, J. (1991). *Tecnologia e educação matemática: Uma revisão de desenvolvimentos recentes e problemas importantes*. Em J. P. Ponte (Org.), *O computador na Educação Matemática.* Série Cadernos de Educação Matemática, n.º 2, pp.45-79. Lisboa: APM.

Kantowski, M. G. (1980). Some thoughts on teaching for problem solving. In R. E. Reys (Ed.), *Problem solving in school mathematics* (pp. 195-203). Reston, VA: NCTM.

Kilpatrick, J. (1988). Editorial. *Journal for Research in Mathematics Education, 19,* 98.

Mariotti, A., & Pesci, A. (1994).Visualization in teaching-learning situations. In *Proceedings of 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 22). Lisboa.

Matos, J. F., Carreira, S., Santos, M. e Amorim, I. (1994). *Ferramentas Computacionais na Modelação Matemática*. Lisboa: Projecto Modelação no Ensino da Matemática, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Matos, J. M., e Serrazina, M. L. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Merrian, S. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach.* San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Ministério da Educação (2001). *Matemática A – 10º ano*. Cursos Gerais de Ciências Naturais, Ciências e Tecnologias, Ciências Sócio-Económicas. Lisboa.: ME – DES.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: IIE e APM (publicado originalmente em inglês em 1989).

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: IIE e APM (publicado originalmente em inglês em 1991).

NCTM (2000). *Principles and standards for school Mathematics.* Reston: NCTM.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM (publicado originalmente em inglês em 2000).

Noss, R. (1991). The computer as a cultural influence in mathematical learning. In M. Harris (Ed.), *Schools, mathematics and work*. London: Falmer (Publicado originalmente em *Educational Studies in Mathematics*, *19*, 1988).

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas*. New York, NY: Basic Books.

Pólya, G. (1965). *Mathematical discovery*, Vol. II (edição combinada, 1981). New York, NY: Wiley.

Polya, G. (1977). *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro. Editora Interciência.

Ponte, J. P. (1988). Matemática, insucesso e mudança: problema possível, impossível ou indeterminado? *Aprender*, *6*, 10-19.

Ponte, J. P. (1992). Concepções dos professores de matemática e processos de formação. In *Educação Matemática: Temas de Investigação* (pp. 185-239). Lisboa: IIE.

Ponte, J. P. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator, 3*(2), 3-8. (http://math.coe.uga.edu/tme/Issues/v03n2/Ponte.pdf)

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante, 3*(1), 3-18.

Ponte, J. P. (1997). *As Novas Tecnologias e a Educação*. Lisboa: Texto Editora.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.). *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM. (pp. 11-23).

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema, 25*, 105-132.

Ponte, J. P., Boavida, A., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: DES do ME.

Ponte, J. P., Brocardo, J., Oliveira H. (2006). *Investigações matemáticas na sala de aula*. 1ª ed., 2ª reimp. - Belo Horizonte: Autêntica.

Ponte, J. P., & Canavarro, P. (1997). *Matemática e novas tecnologias*. Lisboa: Universidade Aberta.

Santos, L., & Ponte, J. P. (2002). A prática lectiva como actividade de resolução de problemas: Um estudo com três professoras do ensino secundário. *Quadrante, 11*(2), 29-54.

Saviani, D. (1985). *Educação: Do senso comum à consciência filosófica*. São Paulo: Cortez.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. London: Academic Press.

Schwartz, J. (1978). Mathematics as a tool for economic understanding. In L. A. Steen (Ed.), *Matehmatics today: Twelve informal essays*. New York, NY: Springer.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: On processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification - The case of function. Em G. Harel e E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function* (pp.59-84). Washington, EUA: Mathematical Association of America.

Shulman, L., & Tamir, P. (1973). Research on teaching in the natural sciences. In R. M. W. Travers (Ed.), *Second handbook of research on teaching* (pp. 1098-1148). Chicago, IL: Rand-McNally.

Silva, J. S. (1975). *Guia para a utilização do compêndio de matemática* (edição original policopiada de 1964). Lisboa: GEP.

Smith, M. U. (1991). A view from biology. In M. U. Smith (Ed.), *Toward a unified theory of problem solving: Views from the content domains*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Stake, R. (1988). Case study methods in educational research: Seeking sweet water. In R. M. Jaeger (Ed.), *Complementary methods for research in education,* Washington, DC: AERA.

Yin, R. (1984). *Case study research: Design and methods.* Newbury Park, CA: Sage.

Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). Editors' introduction: What is mathematical visualization. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Orgs), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 1-7). Washington, DC: Mathematics Association of America.

ANEXOS

TESTE DE AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA A

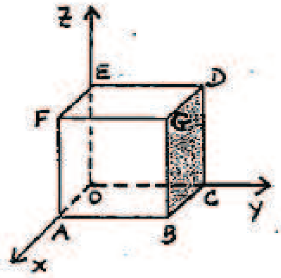
10 º ANO — 12 / MARÇO /2010

Duração: 90 minutos

Grupo I

- As quatro questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Não apresente cálculos nem justificações.

1. Considere num referencial (O, x, y, z) o cubo da figura em que as coordenadas do ponto A são (2, 0, 0).
Qual das seguintes afirmações é verdadeira?



(A) As coordenadas de G são (2, 2, 0).
(B) A norma do vector $\overrightarrow{FD}$ é $2\sqrt{2}$.
(C) As coordenadas do simétrico do ponto D, em relação ao plano xOy, são (0, -2, 2).
(D) Os planos FED e GBC são paralelos.

2. Considere a recta t cuja equação vectorial é: $(x, y) = (0, 1) + k(4, 0)$, $k \in \mathbb{R}$.

(A) t tem declive positivo e ordenada na origem 1.
(B) t tem declive nulo e ordenada na origem 0.
(C) t é uma recta vertical que contém o ponto (0, 1).
(D) t é uma recta horizontal que contém o ponto (0, 1).

3. Acerca de uma função sabe-se que:
- tem um zero para $x = -3$.
- o seu gráfico é uma parábola cujo vértice é o ponto (-1, -4).

Então a parábola:

(A) Intersecta o eixo Ox no ponto (1, 0).
(B) Intersecta o eixo Ox no ponto (3, 0).
(C) Não intersecta o eixo Ox.
(D) Intersecta o eixo Oy no ponto (-3, 0)

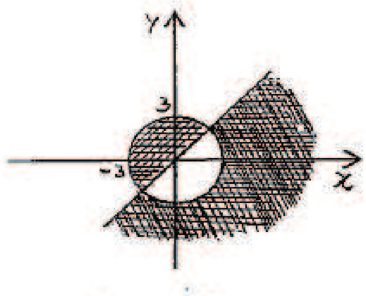
4. A região sombreada da figura é definida pela condição:

(A) $(x^2+y^2 \geq 3 \ \wedge \ y \geq x) \ \vee \ (x^2+y^2 \leq 3 \ \wedge \ y \leq x)$

(B) $(x^2+y^2 \leq 3^2 \ \wedge \ y \geq x)$

(C) $(x^2+y^2 \leq 9 \ \wedge \ y \geq x) \ \vee \ (x^2+y^2 \geq 9 \ \wedge \ y \leq x)$

(D) $(x^2+y^2 \geq 9 \ \wedge \ y \leq x)$

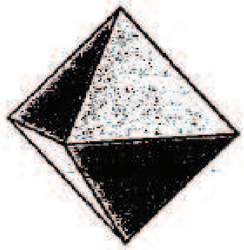


Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

1. Na figura está representado um octaedro regular, cuja aresta mede 6.

Determine o volume do octaedro.
Apresente o resultado arredondado às unidades.



Nota: Sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2. Considere a função g definida da seguinte maneira :

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & se \quad x < -3 \\ 4 & se \quad -3 \leq x < 2 \\ -3x+16 & se \quad x \geq 5 \end{cases}$$

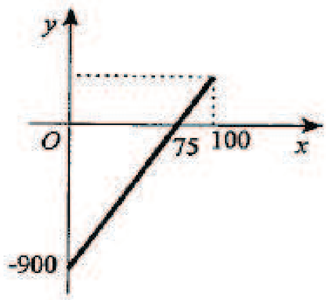
2.1. Calcule a imagem de -4, -3, 0, $\frac{1}{2}$, 5 e 7.
2.2. Indique o domínio de g.
2.3. Represente graficamente a função.
2.4. Analisando o gráfico, indique o contradomínio de g.
2.5. Calcule os zeros da função.

3. O dono de uma mercearia comprou a um fornecedor 100 Kg de café, para depois o colocar à venda. Ele vai vender cada quilograma de café por um certo preço fixo.

Na figura junta está o gráfico da função que dá o lucro y deste negócio, em função da quantidade x de café que ele conseguir vender.

O lucro y é dado em euros.
A quantidade x, de café vendido, é medida em quilogramas.

Tal como a figura sugere, o gráfico passa nos pontos $(0, -900)$ e $(75, 0)$.



Em todas as alíneas seguintes, deve justificar a sua resposta. Pode apresentar a sua justificação, nuns casos, em linguagem corrente, e noutros, através de cálculos convenientes.

3.1. Quanto é que o dono da mercearia pagou ao fornecedor?
3.2. Qual vai ser o preço de um quilograma de café, nesta merceria?
3.3. Se o dono da mercearia vender todo o café que comprou ao fornecedor, qual vai ser o lucro?

4. Pretende-se construir uma vedação em rede junto a um muro, em volta de um terreno rectangular, tal como sugerido na figura.

O comprimento total da rede é 160 metros.

Tal como se mostra na figura:
- a rede é utilizada apenas em três dos quatro lados do rectângulo
- x designa o comprimento de um dos lados do rectângulo

4.1. Mostre que a área do rectângulo é dada, em função de x, por $A(x) = 160x - 2x^2$

4.2. Indique, justificando, o domínio da função A.

4.3. Recorrendo à calculadora, determine o valor de x para o qual é máxima a área do rectângulo e indique qual é a área máxima.

Nota: *apresente na sua resposta o gráfico que visualizou na calculadora, no qual deve assinalar o ponto que lhe permitiu responder à questão colocada, bem como as suas coordenadas.*
Indique também a janela utilizada:

xmin: ______ *xmax:* ______

ymin: ______ *ymax:* ______

FIM

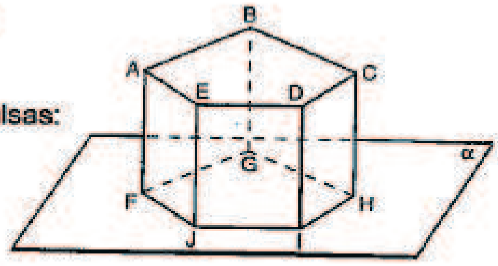
10º ANO

25 / Maio / 2010

TESTE DE MATEMÁTICA A

Apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando os cálculos efectuados e as justificações necessárias.
Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exacto.

1. A figura representa um prisma pentagonal regular com uma base contida no plano α .



1.1. Indique as afirmações que são verdadeiras e as que são falsas:

(I) A recta AB é paralela a α .
(II) O plano ABC é paralelo a α .
(III) As rectas AE e DE são perpendiculares.
(IV) O plano ABG é perpendicular a α .

1.2. Calcule a área lateral do sólido, sabendo que a altura do prisma é $\frac{3}{2}$ da aresta da base e que esta mede 5 cm.

2. Considere a função g definida da seguinte maneira :

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & se \quad x < -3 \\ 4 & se \quad -3 \leq x < 2 \\ -3x+16 & se \quad x \geq 5 \end{cases}$$

2.1. Calcule a imagem de -4 , -3 , 0 , $\frac{1}{2}$, 5 e 7.
2.2. Indique o domínio de g .
2.3. Represente graficamente a função .
2.4. Analisando o gráfico, indique o contradomínio de g.
2.5. Calcule os zeros da função.

3. Considere a família de funções definida por : $f(x) = 2x^2 + bx + 9 \ (b \in \mathbb{R})$

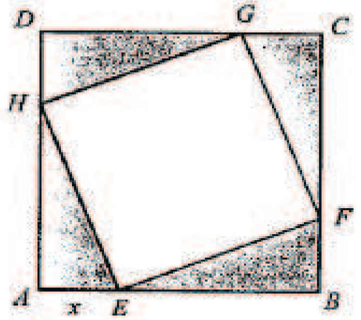
3.1. Determine b de modo que a parábola, imagem geométrica de f , intersecte o eixo das abcissas num único ponto.

3.2. Substitua b por 6 e designe por h a função obtida. Determine, analiticamente, o conjunto solução da condição :

3.2.1. $h(x) \leq 5$.

3.2.2. $h(x) = 6x + 10$. Interprete, geometricamente, as soluções obtidas.

4. Pretende-se fazer um canteiro, no jardim de uma escola, com a forma de um quadrado de 7 metros de lado.



A figura representa um projecto desse canteiro, em que a região sombreada representa a zona que se pretende relvar, e o quadrado [EFGH] representa o local destinado a plantar roseiras.

Tem-se: $\overline{AE} = \overline{FB} = \overline{GC} = \overline{HD} = x$

4.1. Admita que $x = 3$. Pretende-se plantar 700 roseiras na zona reservada para esse efeito. Cada roseira necessita de uma área quadrangular com 20 centímetros de lado. Será possível plantar as 700 roseiras nessa zona? Justifique.

4.2. Mostre que a área, a, da região relvada, em metros quadrados, é dada, em função de x, por $a(x) = 14x - 2x^2$

4.3. Calcule $a(0)$ e interprete o valor obtido no contexto da situação descrita.

4.4. Pretende-se que a zona relvada tenha a maior área possível.
Sem recorrer à calculadora, determine o valor de x para que tal aconteça.

5. Resolva, analiticamente, cada uma das seguintes inequações, em $\mathbb{R}$:

5.1. $(x-5)^2 \leq 0$

5.2. $(x-1)^3 \leq 0$

5.3. $(-2x+1)(x-3)^2 \geq 0$

6. Perguntou-se a 21 rapazes de 11 anos qual era a sua semanada em euros.
Obtiveram-se as seguintes respostas:

0	0	5	0	8	8	5	5	0	8	7
10	8	7	7	5	5	5	6	10	7	

6.1. Com os dados obtidos, construa uma tabela de freqências absolutas e relativas, simples e acumuladas.

6.2 Calcule a média, moda e mediana do conjunto de dados.

Teste Intermédio

Matemática A

Versão 2

Duração do Teste: 90 minutos | 05.05.2010

10.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão do teste. A ausência dessa indicação implica a classificação das respostas aos itens de escolha múltipla com zero pontos.

GRUPO I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correcta.
- Escreva, na sua folha de respostas, **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à opção que seleccionar para responder a esse item.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.
- Se apresentar mais do que uma opção, ou se a letra transcrita for ilegível, a resposta será classificada com zero pontos.

1. Considere, num referencial o.n. xOy, a recta r que intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa 4 e que intersecta o eixo Oy no ponto de ordenada 8

Qual é a equação reduzida da recta r ?

(A) $y = -4x + 2$ **(B)** $y = 4x + 2$

(C) $y = -2x + 8$ **(D)** $y = 2x + 8$

2. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = |x| + 4$

Qual das equações seguintes tem duas soluções distintas?

(A) $g(x) = 5$ **(B)** $g(x) = 4$ **(C)** $g(x) = 3$ **(D)** $g(x) = 2$

3. Sejam a, b e c três números reais.

Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$

Sabe-se que:

- $a > 0$
- a função f tem um único zero, que é o número real 3

Qual é o contradomínio de f ?

(A) $]-\infty, 3]$ **(B)** $[3, +\infty[$ **(C)** $]-\infty, 0]$ **(D)** $[0, +\infty[$

4. Seja f a função cujo gráfico está representado na figura 1.

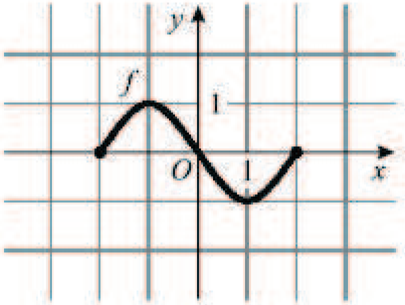
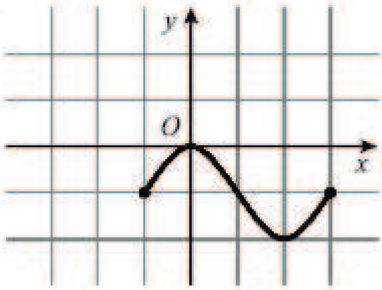


Figura 1

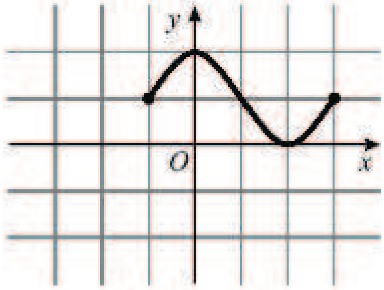
Seja h a função definida por $h(x) = f(x+1) - 1$

Em qual das opções seguintes pode estar representado o gráfico da função h ?

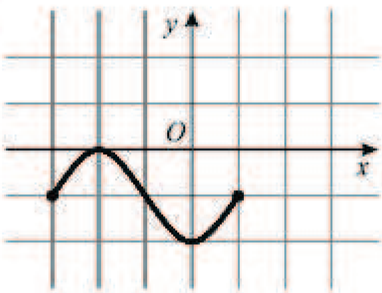
(A)



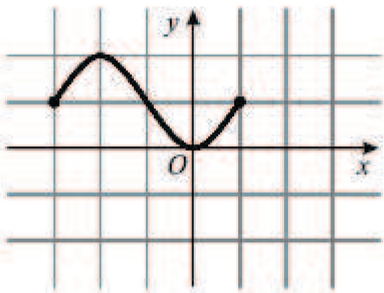
(B)



(C)



(D)



5. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{8} & se\ x \leq 1 \\ x + \frac{1}{3} & se\ x > 1 \end{cases}$

Qual é o valor de $g\left(\frac{3}{4}\right)$?

(A) $\frac{13}{12}$ **(B)** $\frac{7}{8}$ **(C)** $\frac{4}{7}$ **(D)** $\frac{1}{3}$

GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Na figura 2, estão representados, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma quadrangular regular e uma pirâmide.

A base da pirâmide, $[OPQR]$, está contida no plano xOy e coincide com a base inferior do prisma.

O ponto W, vértice da pirâmide, coincide com o centro da base superior, $[STUV]$, do prisma.

O ponto P tem coordenadas $(7, 0, 0)$

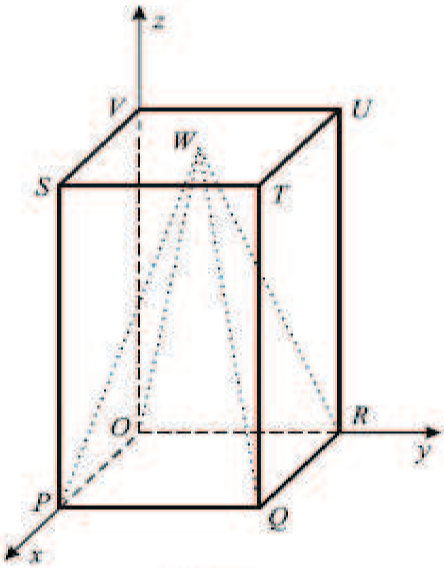


Figura 2

1.1. Defina, por uma condição, a superfície esférica de centro no ponto Q e que passa no ponto O

1.2. Sabe-se que o volume da **pirâmide** é igual a 196

Determine as coordenadas do ponto W, vértice da pirâmide.

2. A Fernanda e a Gabriela são duas irmãs que frequentam a mesma escola. Certo dia, a Fernanda está em casa e a Gabriela está na escola. Num certo instante, a Fernanda sai de casa e vai para a escola e, no mesmo instante, a Gabriela sai da escola e vai para casa. Há um único caminho que liga a casa e a escola. Ambas fazem o percurso a pé e cada uma delas caminha a uma velocidade constante.

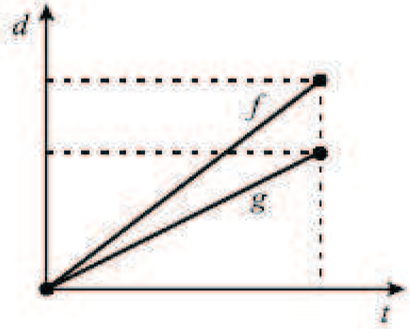
Seja f a função que dá, em metros, a distância percorrida pela Fernanda, t minutos depois de ter saído de casa (a contagem do tempo tem início quando a Fernanda sai de casa e termina quando ela chega à escola).

Seja g a função que dá, em metros, a distância percorrida pela Gabriela, t minutos depois de ter saído da escola (a contagem do tempo tem início quando a Gabriela sai da escola e termina quando ela chega a casa).

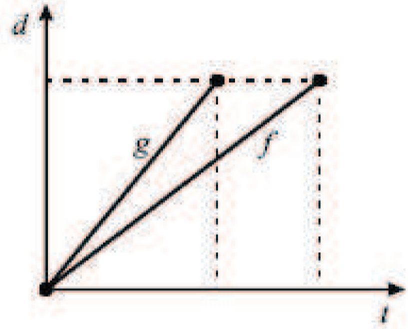
Indique em qual das opções seguintes podem estar representadas graficamente as funções f e g

Numa pequena composição, apresente, para cada uma das outras duas opções, uma razão pela qual a rejeita.

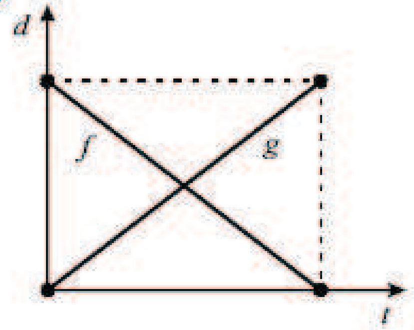
(A)



(B)



(C)



3. A figura 3 representa o projecto de um canteiro com a forma de um triângulo isósceles $\left(\overline{AC} = \overline{BC}\right)$

Nesse triângulo, a base $[AB]$ e a altura relativa a esta base medem ambas 16 metros.

O canteiro vai ter uma zona rectangular, destinada à plantação de flores, e uma zona relvada, representada a sombreado na figura.

O lado $[DG]$ do rectângulo está contido em $[AB]$ e os vértices E e F pertencem, respectivamente, a $[AC]$ e a $[BC]$

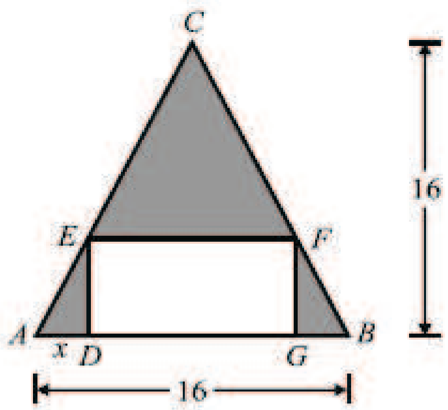


Figura 3

Seja x a distância, em metros, do ponto A ao ponto D $\quad (x \in]0, 8[)$

Resolva os três itens seguintes, **usando exclusivamente métodos analíticos**.

Nota: a calculadora pode ser utilizada em cálculos numéricos.

3.1. Mostre que a área, em metros quadrados, da zona relvada é dada, em função de x, por

$$S(x) = 4x^2 - 32x + 128$$

3.2. Determine o valor de x para o qual a área da zona relvada é mínima e calcule essa área.

3.3. Determine o conjunto dos valores de x para os quais a área da zona relvada é superior a $68\,m^2$

Apresente a sua resposta utilizando a notação de intervalos de números reais.

4. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$

4.1. O gráfico da função f intersecta o eixo das abcissas em quatro pontos.

Designemos esses quatro pontos por A, B, C e D, sendo A o que tem menor abcissa e sendo D o que tem maior abcissa.

O ponto B tem abcissa -1 e o ponto D tem abcissa 2

Seja E o ponto de intersecção do gráfico da função f com o eixo das ordenadas.

Determine a área do triângulo $[AEC]$, **sem recorrer à calculadora**.

4.2. O contradomínio de f é um intervalo da forma $[a, +\infty[$

Determine o valor de a, arredondado às décimas, **recorrendo às capacidades gráficas da calculadora**.

Obtenha o gráfico de f numa janela que lhe permita visualizar o ponto relevante para a resolução do problema. Reproduza, na sua folha de prova, o gráfico visualizado e assinale, nesse gráfico, o ponto relevante para a resolução do problema.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I .... (5 × 10 pontos)		**50 pontos**
GRUPO II		**150 pontos**
1.	35 pontos	
1.1. .... 15 pontos		
1.2. .... 20 pontos		
2.	20 pontos	
3.	55 pontos	
3.1. .... 20 pontos		
3.2. .... 15 pontos		
3.3. .... 20 pontos		
4.	40 pontos	
4.1. .... 20 pontos		
4.2. .... 20 pontos		
Total		**200 pontos**

Ficha n.º 1 de Matemática A, 10º ano – Função quadrática

Objectivos

– Estudar e sistematizar o comportamento da função quadrática quando apresentada na forma $y = a(x - h)^2 + k$ e identificar o significado dos parâmetros a, h e k.

Com recurso à calculadora gráfica os alunos obtêm e reproduzem numa folha de papel os gráficos das funções definidas pelas suas representações algébricas. Depois, identificam, em cada caso, o eixo de simetria, as coordenadas do vértice da parábola, a existência e o número de zeros, o sentido da concavidade e o contradomínio da função. Para as funções do tipo $y = a(x - h)^2 + k$ os alunos devem explicitar os efeitos dos parâmetros a, h e k relativamente aos gráficos das funções e identificar as coordenadas do vértice da parábola e a equação do eixo de simetria. Por fim, os alunos devem reconhecer que podem obter, por exemplo, o gráfico de $y = 2(x + 3)^2 + 1$ a partir do gráfico de $y = 2x^2$ efectuando sobre este uma translação associada ao vector $(-3 , 1)$.

Organização

Trabalho de casa – Resolução individual.

Concretização

Os alunos devem resolver a ficha de trabalho individualmente, como trabalho de casa e entregarem ao investigador para posterior correcção.

Ficha n.º 1 de Matemática A, 10º ano – Função quadrática

1. Considera as funções quadráticas seguintes:

$$y = x^2 \quad , \quad y = 2x^2 \quad , \quad y = 2{,}5x^2 \quad e \quad y = 0{,}5x^2.$$

Com auxílio de uma calculadora gráfica esboça os respectivos gráficos. Identifica, em cada caso, o eixo de simetria, as coordenadas do vértice da parábola, a existência e o número de zeros, o sentido da concavidade e o contradomínio da função.

2. Esboça agora os gráficos das funções:

$$y = -x^2 \quad , \quad y = -2x^2 \quad , \quad y = -2{,}5x^2 \quad \text{e} \quad y = -0{,}5x^2.$$

Relaciona-os com os anteriores.

3. No caso geral como se relaciona o gráfico da função $y = ax^2$ com o de $y = x^2$? Como é que o parâmetro a influencia o gráfico da função?

4. Esboça também os gráficos das funções definidas por:

$$y = x^2 + 1 \quad , \quad y = x^2 + 2 \quad \text{e} \quad y = x^2 - 3.$$

Identifica, em cada caso, o eixo de simetria e as coordenadas do vértice da parábola e explica como podes obter um deles à custa do gráfico da função $y = x^2$.

5. Repete os procedimentos do ponto 4 relativamente às funções:

$$y = 2x^2 + 1 \quad , \quad y = 2x^2 + 2 \quad \text{e} \quad y = 2x^2 - 3.$$

Relaciona os gráficos com o gráfico de $y = 2x^2$.

6. Esboça o gráfico das funções:

$$y = (x + 1)^2 \quad , \quad y = (x - 2)^2 \quad \text{e} \quad y = 2(x + 3)^2 + 1.$$

Identifica, em cada caso, o eixo de simetria e as coordenadas do vértice da parábola.

7. Para as funções do tipo $y = ax^2 + k$, $y = a(x - h)^2$ e $y = a(x - h)^2 + k$ explicita os efeitos dos parâmetros a, h e k relativamente aos gráficos das funções e identifica as coordenadas do vértice da parábola e a equação do eixo de simetria.

8. Tendo em conta o que aprendeste, descreve como podes obter o gráfico de cada uma das funções a partir do gráfico de $y = x^2$:

$$y = -5x^2 \quad , \quad y = (x + 7)^2 \quad \text{e} \quad y = 2(x - 5)^2 + 0{,}6.$$

Ficha n.º 2 de Matemática A, 10º ano – Função quadrática

Objectivos

– Estudar os efeitos dos parâmetros a, α e β na equação $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$ e analisar as informações imediatas que cada um fornece;
– Traduzir uma função quadrática da representação gráfica para a representação algébrica.

Recorrendo à calculadora gráfica, os alunos devem estudar os efeitos dos parâmetros a, α e β, quando a função é dada na forma $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$, e discutir as informações que cada um deles fornece. Na tradução da representação gráfica para a representação algébrica, os alunos podem apresentar várias soluções possíveis se existir dúvidas sobre a ordenada do ponto onde a função intersecta o eixo Oy. No caso da função quadrática que não tem zeros, os alunos devem concluir que esta não pode ser definida como produto de polinómios do 1.º grau (estes admitem sempre um zero). Uma resposta possível pode ser $y = x^2 + 1$ ou qualquer outro polinómio do 2.º grau com $\Delta<0$.

Organização

Trabalho de casa – Resolução individual.

Concretização

Os alunos devem resolver a ficha de trabalho individualmente, como trabalho de casa e entregarem ao investigador para posterior correcção.

Ficha n.º 2 de Matemática A, 10º ano – Função quadrática

1. Representa graficamente a função $y = (x - 2)\,(x + 5)$.

2. Observa o gráfico. Qual o significado de 2 e -5 relativamente ao gráfico?

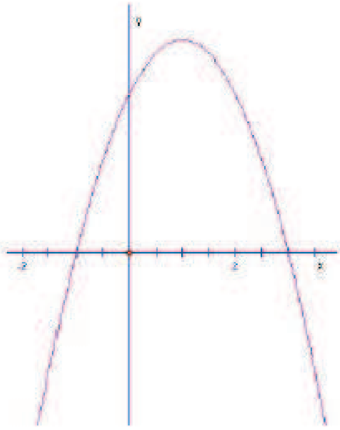
3. Investiga os gráficos das funções da família $y = (x - \alpha)\,(x - \beta)$. Atribui vários valores, positivos, negativos e zero a α e β; experimenta também o caso em que $\alpha = \beta$.

4. Qual é o significado de α e β relativamente ao gráfico?

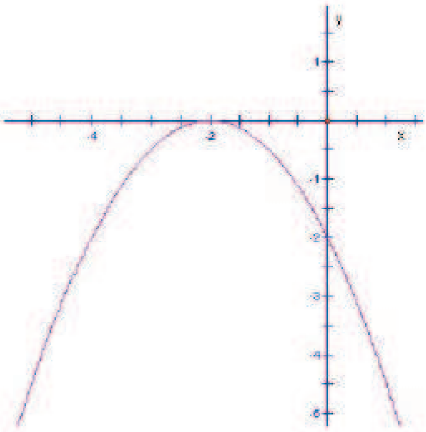
5. Define, através das suas expressões algébricas, funções que correspondem aos seguintes gráficos. Verifica as expressões que encontraste com a calculadora gráfica.

(A)

(B)



(C)



6. Define a representação analítica de uma função quadrática que não tem zeros. Esboça o gráfico recorrendo à calculadora gráfica e confirma que não tem zeros.

Ficha n.º 3 de Matemática A, 10º ano – Função quadrática

Objectivos

– Identificar a expressão algébrica de uma função quadrática, conhecida a sua representação gráfica.
– Resolver inequações do 2.º grau com ou sem calculadora.
– Resolver equações do 2º grau, usando a calculadora gráfica e a forma resolvente, ou identificando casos notáveis, de forma a determinar os zeros da equação.
– Identificar o sentido da concavidade do gráfico de uma função quadrática; determinar as coordenadas do vértice da parábola que representa graficamente a função; identificar o contradomínio de uma função quadrática definida pela sua representação algébrica; indicar os intervalos de monotonia, assim como, o máximo, ou mínimo, de uma função quadrática; determinar os pontos de intersecção do gráfico da função quadrática com os eixos coordenados.
– Aplicar os conhecimentos sobre as funções quadráticas na resolução de problemas, em contexto de semi-realidade ou que relacionam variáveis da Geometria, com uso da calculadora gráfica.

Organização

Trabalho Para Casa – Resolução individual.

Concretização

Os alunos devem resolver a ficha de trabalho individualmente, como trabalho de casa e entregarem ao professor/investigador para posterior correcção e avaliação.

Ficha de Matemática A
10ºAno **2010**
Nome ______________________________ Nº ______ Turma _____

Função quadrática

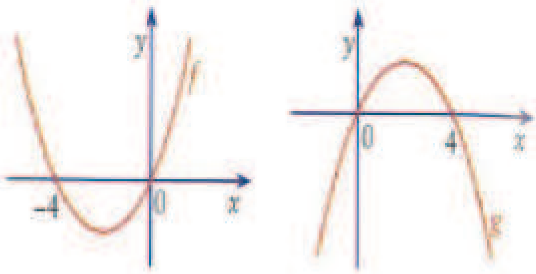
1. Considere a representação gráfica das funções f e g. Qual das afirmações seguintes pode ser **verdadeira**?

(A) $f(x) = x\,(x+4)$ e $g(x) = x\,(x-4)$;

(B) $f(x) = x\,(x+4)$ e $g(x) = x\,(4-x)$;

(C) $f(x) = x\,(4-x)$ e $g(x) = x^2 - 4$;

(D) $f(x) = x^2 - 4$ e $g(x) = x\,(4-x)$.



2. Qual das seguintes funções é uma condição equivalente a $x^2 > 4$?

(A) $x < -2 \vee x > 2$; **(B)** $x > 2$; **(C)** $-2 < x < 2$; **(D)** $x < -2 \wedge x > 2$.

3. O conjunto de valores de k para os quais a função g definida por $g(x) = 2x^2 - 4x + k$, tem dois zeros reais é:

(A) $]2, +\infty[$; **(B)** $R \setminus \{2\}$; **(C)** $]-\infty, 2[$; **(D)** $\{2\}$.

4. Considere as funções reais de variável real definidas por $f(x) = x^2 + k$ e $g(x) = x + 1$. O conjunto dos valores de k para os quais os gráficos de f e g se intersectam é:

(A) $[0, 1]$; **(B)** $]-\infty, 1]$; **(C)** $\left]-\infty, \frac{5}{4}\right]$; **(D)** $[0, +\infty[$.

5. Considere a função h definida por:

$$h(x) = -3x^2 + 6x + 9$$

5.1 Qual é o sentido da concavidade da parábola que representa graficamente a função?

5.2 Determine as coordenadas do vértice da parábola que representa graficamente a função.

5.3 Determine o contradomínio da função h.

5.4 Indique os intervalos de monotonia da função.

5.5 Indique o máximo absoluto da função.

5.6 Determine as coordenadas dos pontos de intersecção do gráfico do gráfico de h com os eixos coordenados.

5.7 Determine x de modo que $h(x) \geq 0$.

5.8 Qual é o ponto do gráfico da função que tem a mesma ordenada que o ponto de coordenadas $(4, -15)$?

6. Do solo é lançado um foguete com a velocidade inicial de $50\ m/s$. A altura $s(t)$, em metros, acima do solo, t segundos após o lançamento, é dada por $s(t) = -4{,}9t^2 + 50t$ e a velocidade v em m/s em cada instante t é dada por $v(t) = -9{,}8t + 50$.

6.1 No mesmo referencial, represente graficamente as duas funções recorrendo à calculadora. Não deixe de assinalar, usando uma casa decimal, os valores dos extremos e os zeros das funções.

6.2 Indique o domínio de cada uma das funções.

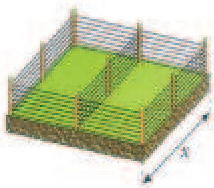
6.3 Qual é a altura máxima que o foguete atinge?

6.4 Qual é a velocidade do foguete no instante em que este atinge a altura máxima?

6.5 Quanto tempo o foguete se mantém no ar?

6.6 Qual é a velocidade do foguete quando este atinge o solo?

7. O Sr. António tem $200\ m$ de rede e pretende construir uma vedação com a forma de um rectângulo e com uma divisão de modo a formar dois rectângulos interiores (ver figura).



7.1 Se optar por um rectângulo com $70\ m$ de comprimento, qual é a área do rectângulo obtido?

7.2 Sendo x a largura do rectângulo, mostre que a área A do rectângulo em função de x é dada por:

$$A(x) = \frac{200x - 3x^2}{2}.$$

7.3 Entre que valores pode variar x?

7.4 Recorrendo à calculadora esboce um gráfico de A determinando os elementos que lhe permitam responder às seguintes questões (em metros e com duas casas decimais):

Quais são as dimensões do rectângulo de área máxima? Qual é a área máxima?

7.5 Quais devem ser as dimensões do rectângulo para que a sua área seja de $1600\ m^2$?

Guião da Tarefa da Entrevista

Aplicação

Esta tarefa é aplicada aos três alunos escolhidos da turma D, do 10º ano de escolaridade. A entrevista é realizada durante e depois da resolução da tarefa com uma duração que se prevê de, aproximadamente, 90 minutos. Tem como objectivo recolher dados que possam contribuir para analisar como os alunos trabalham com as diferentes representações, e quais as representações e processos utilizados na resolução de problemas com funções quadráticas.

Objectivos

- Identificar uma função numa dada representação (tabela, gráfico ou expressão algébrica);
- Identificar as propriedades relevantes das funções e dos seus gráficos (domínio, contradomínio, intersecção com os eixos coordenados, extremos);
- Identificar o gráfico e as propriedades de uma função, aplicando as transformações de funções ao gráfico de outra função;
- Resolver condições de forma gráfica e algébrica;
- Converter uma representação de uma função quadrática numa outra representação;
- Resolver problemas em contexto real, envolvendo a função quadrática e utilizando a calculadora gráfica.

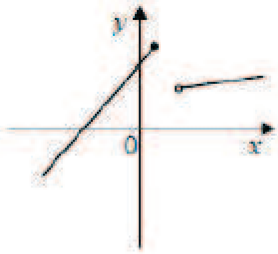
Tarefa da Entrevista

1. Qual das seguintes representações é função? Justifica a tua resposta.

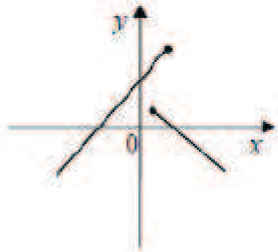
1.1

x	y
-6	-15
-5	-10
-1	0
2	7
-6	15
4	11
-8	45

1.2



1.3



1.4 $3x + y = 5$

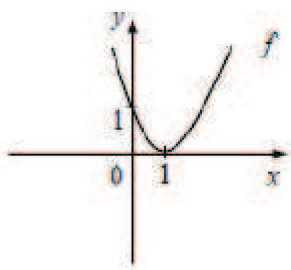
1.5 $x^2 + y^2 = 9$

2. Considera a função g, definida em $I\!R$ por $g(x) = \begin{cases} -3x+1 & se \quad x<0 \\ x^2-4 & se \quad x \geq 0 \end{cases}$

Com recurso à calculadora gráfica, procura uma janela de visualização que se adeqúe à sua representação gráfica e, em seguida, transcreve para a folha de resposta:

- o gráfico obtido, tendo em conta os elementos mais relevantes (como por exemplo, o domínio, o contradomínio, os pontos de intersecção com os eixos coordenados e os extremos);
- a janela de visualização que corresponde ao gráfico apresentado.

3. Seja f a função quadrática representada graficamente na figura ao lado.



3.1. Determina o conjunto solução da condição $g(x) \geq 0$, sabendo que $g(x) = -f(x) + 1$. Justifica a tua resposta.

3.2. Escreve uma expressão algébrica que represente a função quadrática f. Apresenta todos os cálculos que efectuares.

4. O número de pessoas no recinto de um festival rock em Lisboa, entre as *16h* e as *24h*, varia em função de t e pode ser dado aproximadamente por $N(t) = -2t^2 + 8t + 24$, sendo N o número de pessoas em **milhares** e t dado em **horas**, correspondendo $t = 0$ às *18 h*.

4.1. Qual o número de pessoas às *17 h*? Justifica a tua resposta.

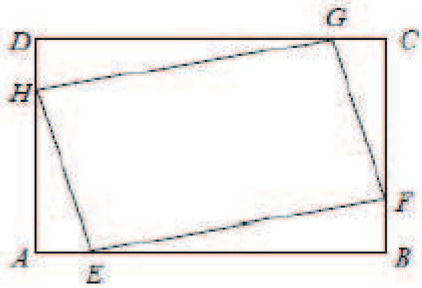
4.2. Calcula $N(2) - N(1)$ e interpreta o resultado no contexto do problema.

4.3. Entre que horas o número de pessoas ultrapassou as *25000* pessoas? Explica o teu raciocínio. Dá o resultado aproximado ao minuto.

5. Na figura está representado um rectângulo $[ABCD]$, tal que:

$AB = 10\ cm$ e $AD = 6\ cm$.

Sabe-se que: $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH} = x$.



5.1. Mostra que a área A do quadrilátero $[EFGH]$ é dada em função de x pela expressão: $A(x) = 2x^2 - 16x + 60$.

5.2. Para que valores de x a área A é inferior ou igual a $46\ cm^2$? Justifica.

Nome do aluno: ____

Nº: __ Ano:__ Turma:__

Questionário 1

Perfil do Aluno

1) Idade: ______

2) Sexo: ☐ M ☐ F

3) Nacionalidade: ____________________________

4) Residência [localidade]: _________________________________

5) Vives com: ☐ Pais
☐ Só Mãe
☐ Só Pai
☐ Avó(s)
☐ Irmã(o)
☐ Outro Quem? ___________________

6) Tens irmãos? ☐ Sim ☐ Não

6.1) Se sim quantos? ____________

7) Número de elementos do agregado familiar: ______________

Pais do Aluno

Pai

1) Habilitação literária:
- ☐ não sabe ler nem escrever
- ☐ sabe ler e escrever
- ☐ 4º ano
- ☐ 6º ano
- ☐ 9º ano
- ☐ 12º ano
- ☐ Curso Superior

Mãe

2) Habilitação literária:
- ☐ não sabe ler nem escrever
- ☐ sabe ler e escrever
- ☐ 4º ano
- ☐ 6º ano
- ☐ 9º ano
- ☐ 12º ano
- ☐ Curso Superior

Aluno

1) Qual é a tua disciplina favorita? ______________________

2) Já ficaste retido algum ano? ☐ Sim ☐ Não

2.1) Se sim em que ano(s)? ______________________

2.2) Quantas vezes? ______________________

3) Qual a profissão que gostarias de ter?

____

4) Pretendes prosseguir os estudos para o Ensino Superior?

☐ Sim ☐ Não ☐ Talvez

4.1) Porquê? ______________________________________

____

____

____

____

Nome do aluno: ____

Nº:__ Ano:__ Turma:__

Questionário 2

– Consideras a Matemática uma disciplina difícil?

– Gostas de Matemática? Porquê?

– Tens sido bom aluno(a) a Matemática?

– Quais as maiores dificuldades que tens sentido este ano? E em anos anteriores?

– Qual o tema da Matemática que mais gostas? E que menos gostas? Porquê?

– Recordas-te de alguma experiência especialmente interessante vivida em anos anteriores na disciplina de Matemática?

– Que tipo de tarefas gostas de realizar na aula de Matemática?

– Gostas de trabalhar com a calculadora gráfica? Porquê?

– Achas que a calculadora gráfica ajuda-te a compreender a Matemática? Justifica.

– Para que serve aprender Matemática?

– O que é para ti a Matemática?